

Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften

Gravitativer Memory-Effekt drehimpulsbehafteter Quellen

Sebastian Drawert
Matr.Nr.: 3262887

28. August 2018

Inhaltsverzeichnis

0	Notationen	1
1	Einleitung	3
2	Energie-Impuls-Tensor für Punktteilchen	4
2.1	Allgemeine Form des Energie-Impuls-Tensors	4
2.1.1	Teilchen ohne Drehimpuls	4
2.1.2	Teilchen mit Drehimpuls	5
2.2	Spezialfall Minkowskiraum	9
3	Linearisierte Gravitation	10
3.1	Störung der Minkowskimetrik	10
3.2	Linearisierte Christoffelsymbole	11
3.3	Linearisierter Riemann- und Einsteintensor	12
4	Geodätische Abweichung	14
5	Asymptotisch flache Raumzeit	15
6	Retardierte Kugelkoordinaten	17
6.1	Christoffelsymbole der Minkowskimetrik	18
6.2	Linearisierte Christoffelsymbole	19
6.3	Linearisierter Riemantensor	20
7	Lösung der Einsteingleichung	22
7.1	Quellteilchen ohne Drehimpuls	22
7.2	Quellteilchen mit Drehimpuls	26
7.3	Riemantensor	33
8	Memory-Effekt	35
8.1	Memory-Tensor	36
8.2	Manifestation des gravitativen Memory-Effekts	38
9	Anwendungsbeispiel	39
9.1	Teilchenzerfall	40
9.2	Größenabschätzung	42
9.3	Ausblick	44
A	Spezielle Komponenten des linearisierten Riemantensors	46
A.1	Allgemeine Berechnung des linearisierten Riemantensors	46
A.2	Explizite Berechnung des linearisierten Riemantensors	48
B	Memory-Tensor	53
	Literatur	59

0 Notationen

In dieser Arbeit werden folgende Notationen und Konventionen benutzt:

- a) Es wird das sogenannte natürliche Einheitensystem verwendet, in welchem gilt:
Lichtgeschwindigkeit $c = 1$, Gravitationskonstante $G_N = 1$, reduziertes Plancksches Wirkungsquantum $\hbar = 1$
- b) Es wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, dabei wird stets über doppelt auftretende ko- und kontravariante Indizes summiert, nicht jedoch summandenübergreifend.
- c) Einheitsvektoren werden mit einem Zirkumflex gekennzeichnet, z.B. \hat{x} für den Einheitsvektor in \vec{x} -Richtung.
- d) Tensoren der Einheitszweispähre werden ebenfalls mit einem Zirkumflex gekennzeichnet. Da diese jedoch stets Indizes tragen, besteht eine eindeutige Abgrenzung zu den dreidimensionalen Einheitsvektoren.
- e) Operatoren wirken nur auf unmittelbar folgende Elemente. Wirkt ein Operator auf mehr als ein Element, so stehen alle affektierten Elemente in Klammern. Manchmal werden aus Gründen der Übersichtlichkeit Klammern gesetzt, die durch diese Konvention nicht unbedingt erforderlich wären.

$$\partial_x(f(x)g(x)) \equiv \partial_x f(x)g(x) + f(x)\partial_x g(x)$$

$$\partial_x f(x)g(x) \equiv (\partial_x f(x))g(x)$$

- f) Auf eine teilweisen Mehrfachverwendung einiger Buchstaben für verschiedene Entitäten, ist im Text nicht gesondert hingewiesen, wenn aus dem Kontext eine Verwechslung ausgeschlossen ist.
So wird in den Anfangskapiteln die abstrakte Indexnotation mit kleinen römischen Buchstaben verwendet. In Kapiteln 6 f.f. bezeichnen kleine römische Buchstaben explizite Koordinaten.
Ebenfalls werden Geodäten, die Störung der Metrik, sowie der relativistische γ -Faktor mit „ γ “ notiert.

1 Einleitung

Rotieren massive Körper umeinander oder ein Körper mit inhomogener Massenverteilung um sich selbst, so entstehen Gravitationswellen. Gravitationswellen sind kurzzeitige Oszillationen der Raumzeit und eine Folge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Gravitationsfeldes. Messbare Effekte können gegenwärtig nur von sehr massereichen und schnell umeinander rotierenden Objekten hervorgerufen werden. Solche Objekte sind beispielsweise Schwarze Löcher oder Neutronensterne. Direkte Nachweise von Verschmelzungen solcher Objekte konnten in der jüngsten Vergangenheit erbracht werden [13]. Gravitationswellendetektoren, nach heutiger Bauart, messen prinzipiell den Abstand zweier frei fallender Massen. Passiert eine Gravitationswelle einen solchen Detektor, so ändert sich der Abstand der Massen zueinander in einer mehr oder weniger periodischen Weise. Die Dauer dieser Oszillationen, solange sie im messbaren Bereich liegen, wird als Dauer der Gravitationswelle bezeichnet. Die Form der Gravitationsstrahlung, das heißt die Amplitude, Frequenz, Polarisierung, etc., hängt von der Beschaffenheit der Quellen ab. Da Schwarze Löcher beträchtliche Drehimpulse besitzen können, ist es naheliegend die Auswirkungen der Drehimpulse auf die Form der Gravitationswellen zu untersuchen, um Rückschlüsse auf das System, welche die Gravitationsstrahlung emittiert, ziehen zu können. Arbeiten dazu sind z.B. in [3] zu finden.

Die theoretische Untersuchung von Gravitationswellen hat gezeigt, dass, zusätzlich zu den kurzzeitigen Oszillationen, weitere Effekte durch Gravitationswellen hervorgerufen werden. Hat eine Gravitationswelle einen Detektor passiert, weisen die Testmassen des Detektors eine zu ihrem ursprünglichen Abstand verschiedene Entfernung auf. Diese permanente Verschiebung wird als Memory-Effekt bezeichnet und wurde zuerst von Zel'dovich und Polnarev 1974 in [10] beschrieben. Die Drehimpulse der Quellen tragen nicht nur zur Form der Gravitationswellen, sondern auch zum Memory-Effekt bei. Dieser Beitrag soll im Rahmen dieser Arbeit näher untersucht werden.

Zunächst müssen jedoch die formalen Rahmenbedingungen geschaffen werden, um einen sehr komplexen Vorgang, wie die Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher, beschreiben zu können. Dazu werden die Quellen als punktförmig und isoliert angesehen. Schwarze Löcher lassen sich sehr gut als Punktmassen beschreiben, da sie im Gegensatz zu anderen Himmelskörpern in ihrem Aufbau keinen hydrostatischen Zwängen unterliegen. Isolierte Quellen gibt es im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht, können jedoch durch asymptotisch flache Raumzeiten beschrieben werden [6]. Dabei wird die Gravitationsstrahlung einer Quelle, welche durch den Energie-Impuls-Tensor T^{ab} charakterisiert wird, von einem Beobachter in unendlicher Entfernung zu dieser Quelle beschrieben. Das heißt der Beobachter nimmt zwar die Gravitationswelle, jedoch nicht die direkte Gravitationswirkung der Quelle wahr. Dadurch lassen sich die Vorgänge durch den Formalismus der linearisierten Gravitation beschreiben. Dabei wird von einer flachen Minkowskiraumzeit ausgegangen, die nur im Bereich der Quellen eine Störung aufweist, welche jedoch weit genug vom Beobachtungspunkt entfernt liegt, sodass der Beobachter sich in keiner gestörten Raumzeit befindet. Durch Lösen der linearisierten Einsteingleichung wird die Krümmung des Raumes, durch die Eigenschaften der Quellen, also des Energie-Impuls-Tensors, ausgedrückt. Schließlich kann mit der geodätischen Abweichungsgleichung das Verhalten von Testmassen ebenfalls auf die Eigenschaften der Quellen zurückgeführt werden.

2 Energie-Impuls-Tensor für Punktteilchen

Die Quelle der Gravitationsstrahlung wird durch den Energie-Impuls-Tensor T^{ab} beschrieben. Im Folgenden werden Quellen, bestehend aus Punktteilchen, betrachtet, welche an einem einzigen Punkt miteinander in Wechselwirkung treten. Die Dauer der Oszillationsphase wird somit unendlich kurz und statt einer realen Gravitationswelle, wird ein Gravitationsstrahlungspuls betrachtet. Diese Vereinfachung ist für die Beschreibung des Memory-Effekts unproblematisch, da dieser ohnehin die permanente Veränderung der Raumzeit weit vor und weit nach der Passage der Gravitationsstrahlung beschreibt und unabhängig von der Oszillationsphase ist.

2.1 Allgemeine Form des Energie-Impuls-Tensors

Zur besseren Vergleichbarkeit der Veränderungen, die die Betrachtung der Drehimpulse der Quellteilchen mit sich bringt, werden die Fälle mit und ohne Drehimpuls separat betrachtet.

2.1.1 Teilchen ohne Drehimpuls

Folgender Energie-Impuls-Tensor beschreibt den Vorgang von k einlaufenden und l auslaufenden Teilchen, welche keine Eigenrotation aufweisen.

$$T^{ab}(x) = \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau p_{\alpha}^{(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}(\tau_{\alpha})) + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} d\tau p_{\beta}^{(a} u_{\beta}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\beta}(\tau_{\beta})), \quad (2.1)$$

mit den Impulsen p^a , Geschwindigkeiten u^a , Weltlinien $\gamma(\tau)$ und τ der Eigenzeit, der jeweiligen Teilchen, sowie der vierdimensionalen Dirac-Funktion δ^4 .

Zunächst soll überprüft werden, ob die Energie-Impuls-Erhaltung, also $\nabla_a T^{ab} = 0$, für diesen Tensor gegeben ist. Dazu muss das Skalarprodukt mit einer beliebigen Testfunktion $f_b(x)$ verschwinden. Zur besseren Übersicht werden die Weltlinien der Teilchen verkürzt mit $\gamma_{\alpha} \equiv \gamma_{\alpha}(\tau_{\alpha})$ notiert .

$$\langle \nabla_a T^{ab}, f_b \rangle = \int d^4x f_b(x) \nabla_a \left[\sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau p_{\alpha}^{(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} \dots \right] \quad (2.2)$$

$$= \underbrace{\left(f_b(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right)}_{=0} \left(\sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau p_\alpha^a u_\alpha^b \delta^4(x - \gamma_\alpha) + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} \dots \right) \quad (2.3)$$

$$- \int d^4x \nabla_a f_b(x) \left[\sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau u_\alpha^a p_\alpha^b \delta^4(x - \gamma_\alpha) + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} \dots \right]$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau \left[u_\alpha^a \nabla_a \left(f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^b \right) - f_b(\gamma_\alpha) \underbrace{u_\alpha^a \nabla_a p_\alpha^b}_{=0} \right] + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} \dots \quad (2.4)$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^k f_b(\gamma(0)) p_\alpha^b + \sum_{\beta=1}^l f_b(\gamma(0)) p_\beta^b \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.5)$$

Zunächst wurde partiell integriert und die Tatsache ausgenutzt, dass zwischen den Impulsen p^a und Geschwindigkeiten u^a der Zusammenhang $p^a = m u^a$ gilt, wobei m die Masse der Teilchen ist, wodurch die Geschwindigkeiten und Impulse vertauschen und die Symmetrisierung ausgeführt werden kann. Anschließend wurde der verbleibende Integrand in eine totale Ableitung überführt, die Geodätengleichung $u^a \nabla_a p^b = 0$ ausgenutzt und die Integrationsgrenzen der zweiten Summe vertauscht.

Unter der Annahme $f_b(\gamma(0)) \neq 0$, welche gerechtfertigt ist, da (2.5) für eine beliebige Testfunktion gilt, folgt direkt

$$\sum_{\alpha=1}^k p_\alpha^b = \sum_{\beta=1}^l p_\beta^b. \quad (2.6)$$

Die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors verschwindet also, wenn die Summe der Impulse aller einlaufenden Teilchen gleich der Summe der Impulse aller auslaufenden Teilchen ist.

2.1.2 Teilchen mit Drehimpuls

Werden Teilchen betrachtet, deren Drehimpuls nicht verschwindet, so muss dies im Energie-Impuls-Tensor berücksichtigt werden. Es erweitert sich damit (2.1) um jeweils

einen Summanden für die ein- und auslaufenden Teilchen

$$\begin{aligned}
T^{ab}(x) = & \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 d\tau p_{\alpha}^{(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) - \nabla_c \int_{-\infty}^0 d\tau S_{\alpha}^{c(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) \\
& + \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} d\tau p_{\beta}^{(a} u_{\beta}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\beta}) - \nabla_c \int_0^{\infty} d\tau S_{\beta}^{c(a} u_{\beta}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\beta}),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei S^{ab} der Drehimpulstensor ist.

Es soll nun wieder $\nabla_a T^{ab} = 0$ nachgewiesen werden, wobei das Vorgehen analog zum drehimpulslosen Fall ist und die partielle Integration nicht mehr explizit ausgeschrieben wurde. Zu beachten ist, dass im Drehimpulsterm einmal mehr partiell integriert werden muss, um alle Ableitungen auf die Testfunktion wirken zu lassen.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_a T^{ab}, f_b \rangle = & - \sum_{\alpha=1}^k \int d^4x \left[\int_{-\infty}^0 d\tau \nabla_a f_b(x) p_{\alpha}^{(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^0 d\tau \nabla_c \nabla_a f_b(x) S_{\alpha}^{c(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) \right] - \sum_{\beta=1}^l \dots \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Zunächst werden wieder die räumlichen Integrale ausgeführt, die Symmetrisierung aller Indizes explizit ausgeschrieben, sowie die Integrationsgrenzen der auslaufenden Teilchen vertauscht

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{2} \left[\nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^a u_{\alpha}^b + \nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^b u_{\alpha}^a \right. \\
\left. + \nabla_c \nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{ca} u_{\alpha}^b + \nabla_c \nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \right] \stackrel{!}{=} \sum_{\beta=1}^l \int_0^{\infty} \frac{ds\tau}{2} \dots
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Wird der Drehimpuls berücksichtigt, verschwindet im Allgemeinen die Geodätengleichung nicht, sondern es gelten die folgenden Ausdrücke, wie sie Papapetrou 1951 formulierte [4]. Die Geodätengleichung lautet

$$u^a \nabla_a p_b = \frac{1}{2} R_{abcd} S^{cd} u^a. \tag{2.10}$$

Mit der Spinpräzession

$$u^c \nabla_c S^{ab} = p^a u^b - p^b u^a, \tag{2.11}$$

ist der Impuls gegeben durch

$$p^a = m u^a + u^c \nabla_c S^{ab} u_b. \tag{2.12}$$

Des Weiteren wird die Definition des Riemantensors durch die Antisymmetrisierung kovarianter Ableitungen verwendet, worauf im Kapitel 3.3 näher eingegangen wird.

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}X_c = \frac{1}{2}R_{abcd}X^d \quad (2.13)$$

Nun wird in (2.9) die Antisymmetrie des Drehimpulstensors ausgenutzt und gemäß (2.13) die Ableitungen im letzten Summanden vertauscht.

$$\sum_{\alpha=1-\infty}^k \int \frac{d\tau}{2} \left[\nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^a u_\alpha^b + u_\alpha^a \nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^b + \underbrace{\nabla_{[c}\nabla_{a]}f_b(\gamma_\alpha)}_{= 2.13)} S_\alpha^{ca} u_\alpha^b \right. \quad (2.14)$$

$$\left. + \nabla_a \nabla_c f_b(\gamma_\alpha) S_\alpha^{cb} u_\alpha^a + f^d(\gamma_\alpha) R_{cabd} S_\alpha^{cb} u_\alpha^a \right] = \sum_{\beta=1}^l \dots$$

$$\sum_{\alpha=1-\infty}^k \int \frac{d\tau}{2} \left[\nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^a u_\alpha^b + u_\alpha^a \nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^b + f^d(\gamma_\alpha) \frac{1}{2} \underbrace{R_{cabd} S_\alpha^{ca} u_\alpha^b}_{a \rightarrow b, b \rightarrow a} \right. \quad (2.15)$$

$$\left. + u_\alpha^a \nabla_a \left(\nabla_c f_b(\gamma_\alpha) S_\alpha^{cb} \right) - \nabla_c f_b(\gamma_\alpha) \underbrace{u_\alpha^a \nabla_a S_\alpha^{cb}}_{= (2.11)} + f^d(\gamma_\alpha) R_{cabd} S_\alpha^{cb} u_\alpha^a \right] = \sum_{\beta=1}^l \dots$$

$$\sum_{\alpha=1-\infty}^k \int \frac{d\tau}{2} \left[\nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^a u_\alpha^b + u_\alpha^a \nabla_a f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^b + f^d(\gamma_\alpha) \frac{1}{2} R_{cbad} S_\alpha^{cb} u_\alpha^a \right. \quad (2.16)$$

$$\left. + u_\alpha^a \nabla_a \left(\nabla_c f_b(\gamma_\alpha) S_\alpha^{cb} \right) - \nabla_c f_b(\gamma_\alpha) \left(p_\alpha^c u_\alpha^b - p_\alpha^b u_\alpha^c \right) \right. \quad (2.16)$$

$$\left. + f^d(\gamma_\alpha) R_{cabd} S_\alpha^{cb} u_\alpha^a \right] = \sum_{\beta=1}^l \dots$$

$$\sum_{\alpha=1-\infty}^k \int \frac{d\tau}{2} \left[u_\alpha^a \nabla_a \left(2f_b(\gamma_\alpha) p_\alpha^b + \nabla_c f_b(\gamma_\alpha) S_\alpha^{cb} \right) - 2f^b(\gamma_\alpha) \underbrace{u_\alpha^a \nabla_a p_\alpha^b}_{= (2.10)} \right. \quad (2.17)$$

$$\left. + f^d(\gamma_\alpha) \left(\frac{1}{2} R_{cbad} + R_{cabd} \right) S_\alpha^{cb} u_\alpha^a \right] = \sum_{\beta=1}^l \dots$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{2} \left[u_{\alpha}^a \nabla_a \left(2f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^b + \nabla_c f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{cb} \right) \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{f^b(\gamma_{\alpha}) R_{abcd} S_{\alpha}^{cd} u_{\alpha}^a}_{\text{I}} + \underbrace{f^d(\gamma_{\alpha}) \left(\frac{1}{2} R_{cbad} + R_{cabd} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a}_{\text{II}} \right] = \sum_{\beta=1}^l \dots
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Die Terme I und II, welche Riemantensoren beinhalten, werden wie folgt umgeformt.

$$\text{I} + \text{II} = - \underbrace{f^b(\gamma_{\alpha}) R_{abcd} S_{\alpha}^{cd} u_{\alpha}^a}_{b \rightarrow d, d \rightarrow b} + f^d(\gamma_{\alpha}) \left(\frac{1}{2} R_{cbad} + R_{cabd} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \tag{2.19}$$

$$= f^d(\gamma_{\alpha}) \left(-R_{adcb} + \frac{1}{2} R_{cbad} + R_{cabd} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \tag{2.20}$$

$$= f^d(\gamma_{\alpha}) \frac{1}{2} \left(-R_{cbad} + R_{cabd} + \underbrace{R_{cabd}}_{b \rightarrow c, c \rightarrow b} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \tag{2.21}$$

$$= f^d(\gamma_{\alpha}) \frac{1}{2} \left(-R_{cbad} + R_{cabd} - R_{bacd} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \tag{2.22}$$

$$= f^d(\gamma_{\alpha}) \frac{1}{2} \left(\underbrace{R_{bcad} + R_{cabd} + R_{abcd}}_{=0} \right) S_{\alpha}^{cb} u_{\alpha}^a \tag{2.23}$$

Zunächst wurde eine Indexumbenennung in (2.19) vorgenommen, um anschließend in (2.20) im ersten Summanden die Symmetrie des Riemantensors, $R_{abcd} = R_{cdab}$, auszunutzen. In (2.21) wird die Antisymmetrie des Drehimpulstensors, $S^{cb} = -S^{bc}$, in Verbindung mit einer Indexumbenennung ausgenutzt und in (2.22) erneut die Antisymmetrie des Riemantensors in den ersten beiden Indizes, für den ersten und dritten Summanden zu Hilfe gezogen.

Nun steht in (2.23) die erste Bianchi-Identität, wodurch sich (2.18) nach Ausführung des verbleibenden Integrals, schließlich zu

$$\sum_{\alpha=1}^k 2f_b(\gamma(0)) p_{\alpha}^b + \nabla_c f_b(\gamma(0)) S_{\alpha}^{cb} = \sum_{\beta=1}^l 2f_b(\gamma(0)) p_{\beta}^b + \nabla_c f_b(\gamma(0)) S_{\beta}^{cb} \tag{2.24}$$

ergibt. Daraus lässt sich unabhängig voneinander die Impuls- und Drehimpulserhaltung ableiten. Die Impulserhaltung folgt, indem einmal eine Testfunktion f_b gewählt wird, welche im Ursprung nicht verschwindet, $f_b(\gamma(0)) \neq 0$, ihre Ableitung jedoch im Ursprung verschwindet, $\nabla_c f_b(\gamma(0)) = 0$.

$$\sum_{\alpha=1}^k p_{\alpha}^b = \sum_{\beta=1}^l p_{\beta}^b \tag{2.25}$$

Für die Drehimpulserhaltung wird eine Testfunktion f_b gewählt, deren Ableitung im Ursprung nicht verschwindet, $\nabla_c f_b(\gamma(0)) \neq 0$, die Funktion selbst jedoch verschwindet,

$f_b(\gamma(0)) = 0$, somit ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^k S_{\alpha}^{cb} = \sum_{\beta=1}^l S_{\beta}^{cb}. \quad (2.26)$$

Dies ist gerechtfertigt, da die Beziehung für beliebige Testfunktionen gelten muss.

2.2 Spezialfall Minkowskiraum

Im flachen Raum vereinfachen sich die vorangegangenen Rechnungen, da der Riemannntensor verschwindet, wodurch ebenfalls die Geodätengleichung verschwindet, also $u^a \nabla_a p^b = 0$ gilt. Der drehimpulslose Fall ist identisch zu (2.2) und Folgende, da dort bereits die gleichen Zusammenhänge für die Impulse gelten, nämlich $p^a = mu^a$, vergleiche (2.12) und (2.10), für $S^{ab} \equiv 0$.

Für drehimpulsbehaftete Teilchen ergibt sich aus (2.11) folgende Rechnung, wobei ebenfalls die partiellen Integrationen bereits ausgeführt wurden.

$$\begin{aligned} \langle \nabla_a T^{ab}, f_b \rangle &= - \sum_{\alpha=1}^k \int d^4x \left[\int_{-\infty}^0 d\tau \nabla_a f_b(x) p_{\alpha}^a u_{\alpha}^b \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 d\tau \nabla_a \nabla_c f_b(x) S_{\alpha}^{c(a} u_{\alpha}^{b)} \delta^4(x - \gamma_{\alpha}) \right] - \sum_{\beta=1}^l \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{2} \left[\nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^b u_{\alpha}^a + \nabla_a f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^a u_{\alpha}^b \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\nabla_{(a} \nabla_c) f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{ca] u_{\alpha}^b}}_{=0} + u_{\alpha}^a \nabla_a \left(\nabla_c f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{cb} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \nabla_c f_b(\gamma_{\alpha}) \underbrace{u_{\alpha}^a \nabla_a S_{\alpha}^{cb}}_{(= 2.11)} \left] - \sum_{\beta=1}^l \dots \right. \\ &= - \sum_{\alpha=1}^k \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{2} \left[u_{\alpha}^a \nabla_a \left(2f_b(\gamma_{\alpha}) p_{\alpha}^b + \nabla_c f_b(\gamma_{\alpha}) S_{\alpha}^{cb} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2f_b(\gamma_{\alpha}) \underbrace{u_{\alpha}^a \nabla_a p_{\alpha}^b}_{=0} \right] - \sum_{\beta=1}^l \dots \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\sum_{\alpha=1}^k f_b(\gamma(0))p_\alpha^b + \frac{1}{2}\nabla_c f_b(\gamma(0))S_\alpha^{cb} = \sum_{\beta=1}^l f_b(\gamma(0))p_\beta^b + \frac{1}{2}\nabla_c f_b(\gamma(0))S_\beta^{cb} \quad (2.30)$$

Zunächst wurden die Symmetrisierungen ausgeführt, die Antisymmetrie des Drehimpulsensors, sowie die Symmetrie der kovarianten Ableitung im Minkowskiraum ausgenutzt und ein Drehimpulsterm in eine totale Ableitung überführt. Anschließend wird die Gleichung der Spinpräzession ausgenutzt und der verbleibende Term in eine totale Ableitung überführt.

Wie im allgemeinen Fall ergibt sich durch geeignete Wahl der Testfunktion f_b die Impuls- und Drehimpulserhaltung separat.

3 Linearisierte Gravitation

Da in der Allgemeinen Relativitätstheorie selbst das Zweikörperproblem nicht analytisch lösbar ist, müssen geeignete vereinfachende Annahmen getroffen werden. Weit verbreitet ist die Methode, die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu linearisieren. Dies bedeutet, dass eine Lösung betrachtet wird, welche sich durch eine kleine Störung einer bekannten stationären Lösung darstellen lässt. Alle zur Behandlung eines konkreten Problems benötigten Entitäten werden dann bis zur linearen Ordnung der Störung entwickelt. Von Interesse ist dabei die neue Struktur der Raumzeit, genauer, wie sich die Krümmung des Raumes durch die Störung ändert. Dazu werden aus der linearisierten Metrik zunächst die resultierenden linearisierten Christoffelsymbole bestimmt. Aus diesen wiederum lässt sich der linearisierte Riemanntensor berechnen, welcher schlussendlich durch Verjüngung den linearisierten Riccitenor und somit die linearisierten Einsteingleichungen liefert.

3.1 Störung der Minkowskimetrik

Der Raum in welchem sich die Gravitationswellen ausbreiten, soll einem Minkowskiraum entsprechen, welcher lediglich im Bereich der Quelle eine kleine Störung aufweist. Die Metrik soll von einem reellen Parameter s abhängen, nach welchem bis zur ersten Ordnung entwickelt wird und alle Terme quadratischer oder höherer Ordnung vernachlässigt werden, da die Störung klein, im Sinne von $s \ll 1$, sein soll. Die Störung γ_{ab} wird aus der Metrik g_{ab} nach dem Schema

$$\gamma_{ab} = \left. \frac{\partial}{\partial s} g_{ab}(s) \right|_{s=0} \quad (3.1)$$

gewonnen. Die linearisierte Metrik wird dann aus der ungestörten Metrik $g_{ab}(s=0) = \eta_{ab}$, welche hier der Minkowskimetrik entspricht, und der zunächst nicht näher bekannten Störung γ_{ab} zusammengesetzt

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}. \quad (3.2)$$

Die Inverse g^{ab} lässt sich aus (3.2) und der Forderung, dass sie ebenfalls aus der inversen Minkowskimetrik η^{ab} und einem inversen Störterm γ^{ab} zusammengesetzt sein soll, bestimmen.

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &\stackrel{!}{=} g^{ab} g_{bc} = (\eta^{ab} \pm \gamma^{ab})(\eta_{bc} + \gamma_{bc}) = \underbrace{\eta^{ab}\eta_{bc}}_{=1} + \eta^{ab}\gamma_{bc} \pm \gamma^{ab}\eta_{bc} \pm \underbrace{\gamma^{ab}\gamma_{bc}}_{O(s^2)} \\ &\Rightarrow g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Der Übergang zwischen ko- und kontravarianten Indizes wird mit der ungestörten Minkowskimetrik η_{ab} vollzogen, da anderen Falls die linearisierte Näherung verlassen würde.

3.2 Linearisierte Christoffelsymbole

Die Christoffelsymbole einer pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇_a lassen sich für eine lokale Karte durch die Metrik g_{ab} ausdrücken. Es gibt zwei Arten von Christoffelsymbolen

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\partial_b g_{ca} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc}) \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (3.5)$$

(3.4) werden als Christoffelsymbole 1. Art und (3.5) als Christoffelsymbole 2. Art bezeichnet. Sie sind zwar keine tensoriellen Größen, lassen sich jedoch mit Hilfe der Metrik, was bereits aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, ineinander überführen $\Gamma_{bc}^a = g^{ad}\Gamma_{abc}$. Aus der Symmetrie der Metrik folgt, dass die Christoffelsymbole in den letzten zwei Indizes symmetrisch sind $\Gamma_{abc} = \Gamma_{acb}$.

Um die linearisierten Christoffelsymbole aus der gestörten Metrik g_{ab} zu gewinnen, bietet es sich der Einfachheit halber an, zunächst die Christoffelsymbole 1. Art zu verwenden. Es wird die linearisierte Metrik (3.2) in (3.4) unter Verwendung von (3.1) eingesetzt und bis zur ersten Ordnung nach s entwickelt. Die kovariante Ableitung von η_{ab} wird mit ∇_a und die linearisierten Christoffelsymbole mit $\delta\Gamma_{abc}$ notiert.

$$\delta\Gamma_{abc} = \frac{\partial}{\partial s}\Gamma_{abc}(s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{2}\left(\nabla_c g_{ba}(s) + \nabla_b g_{ca}(s) - \nabla_a g_{bc}(s)\right)\Big|_{s=0} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\nabla_c (\eta_{ba} + s\gamma_{ba}) + \nabla_b (\eta_{ca} + s\gamma_{ca}) - \nabla_a (\eta_{bc} + s\gamma_{bc}) \right) + O(s^2) \Big|_{s=0} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\nabla_c \eta_{ba} + \nabla_b \eta_{ca} - \nabla_a \eta_{bc} \right) + s \left(\nabla_c \gamma_{ba} + \nabla_b \gamma_{ca} - \nabla_a \gamma_{bc} \right) + O(s^2) \right] \Big|_{s=0} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\nabla_c \gamma_{ba} + \nabla_b \gamma_{ca} - \nabla_a \gamma_{bc} \right) \quad (3.9)$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich mit den Christoffelsymbolen 2. Art zu arbeiten. Diese lassen sich mit der Konvention, dass Indizes mit der Minkowskimetrik η_{ab} gesenkt bzw. deren Inverse gehoben werden, aus (3.9) einfach bestimmen

$$\delta \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} \eta^{ad} \left(\nabla_c \gamma_{bd} + \nabla_b \gamma_{cd} - \nabla_d \gamma_{bc} \right). \quad (3.10)$$

3.3 Linearisierter Riemann- und Einsteintensor

Der Einsteintensor G_{ab} und die Einsteingleichungen

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab}, \quad (3.11)$$

mit dem Riccitenor R_{ab} und dem Krümmungsskalar R , sollen ebenfalls bis zur ersten Ordnung des Parameters s der Metrik entwickelt werden. Der Riemantensor ist für einen Zusammenhang ∇ über folgende Beziehung definiert

$$R_{abc}{}^d x_d = \nabla_a \nabla_b x_c - \nabla_b \nabla_a x_c. \quad (3.12)$$

mit einer beliebigen 1-Form x_c .

Unter Verwendung der Transformationsformel, welche kovariante Ableitungen ineinander überführt,

$$\begin{aligned} \nabla_a'' T^{b_1 \dots b_n}_{c_1 \dots c_m} &= \nabla_a' T^{b_1 \dots b_n}_{c_1 \dots c_m} + \Gamma_{ad}^{b_1} T^{db_2 \dots b_n}_{c_1 \dots c_m} + \Gamma_{ad}^{b_2} T^{b_1 db_3 \dots b_n}_{c_1 \dots c_m} \\ &+ \dots + \Gamma_{ad}^{b_n} T^{b_1 \dots b_{n-1} d}_{c_1 \dots c_m} \\ &- \Gamma_{ac_1}^d T^{b_1 \dots b_n}_{dc_2 \dots c_m} - \Gamma_{ac_2}^d T^{b_1 \dots b_n}_{c_1 dc_3 \dots c_m} \\ &- \dots - \Gamma_{ac_m}^d T^{b_1 \dots b_n}_{c_1 \dots c_{m-1} d}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

lautet der Riemantensor bezüglich einer lokalen Karte

$$R_{abc}{}^d = -\partial_a \Gamma_{bc}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d + \partial_b \Gamma_{ac}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d \quad (3.14)$$

und bezüglich einer beliebigen kovarianten Ableitung ∇_a

$$R_{abc}{}^d = -\nabla_a \Gamma_{bc}^d + \nabla_b \Gamma_{ac}^d. \quad (3.15)$$

Aus (3.15) ergibt sich der linearisierte Riemanntensor $\delta R_{abc}{}^d$ mit den linearisierten Christoffelsymbolen zu

$$\delta R_{abc}{}^d = -\nabla_a \delta \Gamma_{bc}^d + \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^d. \quad (3.16)$$

Da der Krümmungsskalar und der Riccitenor Kontraktionen des Riemanntensors sind

$$R = g^{ab} R_{ab} = g^{ab} R_{acb}{}^c, \quad (3.17)$$

lassen sie sich durch die Christoffelsymbole darstellen. Für die kovariante Ableitung ∇_a der Minkowskimetrik η_{ab} ergibt sich der linearisierte Riccitenor gemäß (3.17) und (3.10), sowie der Tatsache, dass η_{ab} kovariant konstant $\nabla_c \eta_{ab} = 0$ ist, zu

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} = \delta R_{acb}{}^c &= \frac{1}{2} \eta^{cd} \left(-\nabla_a \nabla_c \gamma_{bd} + \nabla_a \nabla_b \gamma_{cd} - \nabla_a \nabla_d \gamma_{cb} + \nabla_c \nabla_a \gamma_{bd} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_c \nabla_b \gamma_{ad} - \nabla_c \nabla_d \gamma_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\nabla_a \nabla_b \gamma_c{}^c + \nabla^c \nabla_a \gamma_{bc} + \nabla^c \nabla_b \gamma_{ac} - \nabla^c \nabla_c \gamma_{ab} \right). \quad (3.19)$$

Für den linearisierten Krümmungsskalar ergibt somit

$$\delta R = -\nabla_a \nabla^a \gamma_c{}^c + \nabla^b \nabla^c \gamma_{cb}. \quad (3.20)$$

Die linearisierte Form der Einsteingleichung

$$\delta G_{ab} = \delta R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \delta R, \quad (3.21)$$

mit dem linearisierten Riccitenor (3.19) und linearisierten Krümmungsskalar (3.20), lässt sich durch Einführen einer neuen Größe h_{ab} , definiert über

$$\gamma_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \eta^{cd} h_{cd}, \quad (3.22)$$

sehr kompakt schreiben. Durch die Wahl der Eichung $\nabla^b h_{ab} = 0$, vgl. [1], vereinfacht sich der linearisierte Riccitenor und es lässt sich schließlich für den linearisierten Einstein-tensor

$$\delta G_{ab} = -\frac{1}{2} \nabla^c \nabla_c h_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (3.23)$$

schreiben. Die zunächst unbekannte Störgröße γ_{ab} der Metrik lässt sich nun also durch den Energie-Impuls-Tensor T_{ab} mit Hilfe der Formeln (3.23) und (3.22) bestimmen.

4 Geodätische Abweichung

Von praktischem Interesse ist das Verhalten von Testmassen unter dem Einfluss von Gravitationsstrahlung. Da sich frei fallende Testmassen per definitionem in einer Raumzeit auf Geodäten bewegen, eignen sie sich um die geodätische Abweichung zu „messen“. Im flachen Raum entsprechen Geodäten Geraden. Durch die betrachtete Störung γ_{ab} der Minkowskimetrik η_{ab} ergeben sich, wie im vorherigen Kapitel gezeigt, nicht verschwindende Komponenten des Riemanntensors und somit eine Krümmung der Raumzeit, welche sich durch Relativbewegungen der Testmassen äußert. Definiert man einen Vektor x^a , der zwei Testmassen verbindet, lässt sich durch dessen Zeitableitungen, analog zur klassischen Mechanik, eine Geschwindigkeit v^a , mit welcher sich die Testmassen relativ zueinander bewegen, und eine Beschleunigung a^a definieren. Diese Größen werden jeweils von einem Beobachter im Ruhesystem einer Testmasse gemessen und geben an, mit welcher Beschleunigung die anderen Testmassen relativ zum Beobachter beschleunigt werden. Im Sinne einer Kraft erfährt jedoch keiner der Beobachter im Bezugssystem jeder Testmasse eine Beschleunigung.

Formal wird eine einparametrische Gruppe von Geodäten γ_s betrachtet, sodass der Verbindungsvektor x^a eine infinitesimale Größe ist, vgl. Abbildung 1. t^a bezeichnet die Tangente

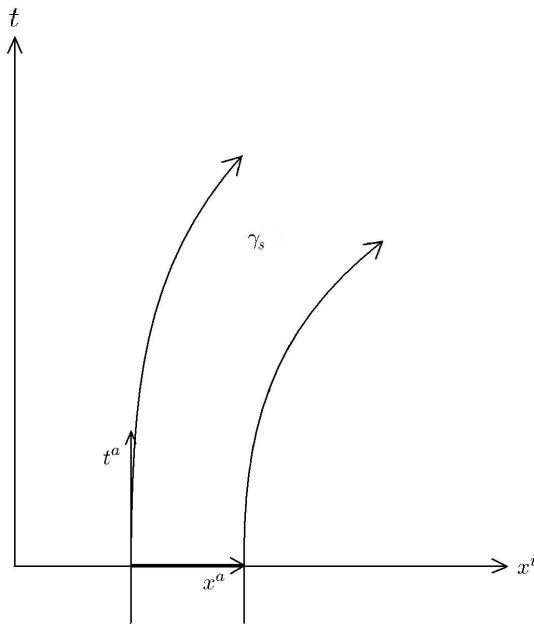


Abbildung 1: Zwei Geodäten einer Schar mit Parameter s , Verbindungsvektor x^a und Tangente t^a

der jeweiligen Geodäte und die Geschwindigkeit v^a ergibt sich als einfache, die Beschleunigung a^a als zweifache Richtungsableitung von x^a entlang γ_s

$$a^a = t^c \nabla_c v^a = t^c \nabla_c (t^b \nabla_b x^a). \quad (4.1)$$

Durch eine affine Parametrisierung der Geodäten wird erreicht, dass die Vektorfelder x^a und t^a vertauschen¹, nämlich

$$t^b \nabla_b x^a = x^b \nabla_b t^a. \quad (4.2)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung, lässt sich die geodätische Abweichung wie folgt ausdrücken.

$$\begin{aligned} a^a &= t^c \nabla_c (t^b \nabla_b x^a) \\ &= t^c \nabla_c (x^b \nabla_b t^a) \\ &= (t^c \nabla_c x^b) (\nabla_b t^a) + x^b t^c \nabla_c \nabla_b t^a \\ &\stackrel{\text{gemäß (3.12)}}{=} (x^c \nabla_c t^b) (\nabla_b t^a) + \underbrace{x^b t^c \nabla_b \nabla_c t^a}_{b \rightarrow c, c \rightarrow b} + R_{bcd}{}^a x^b t^c t^d \\ &= x^c \nabla_c \underbrace{(t^b \nabla_b t^a)}_{=0} + R_{bcd}{}^a x^b t^c t^d \\ &= R_{bcd}{}^a x^b t^c t^d \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die geodätische Abweichung ist also vollständig durch den Riemanntensor bestimmt. (4.3) wird auch als Jacobigleichung bezeichnet. Obiger Ausdruck lässt sich durch die Form der Tangenten $t^a = (1, 0, 0, 0)$ im Ruhesystem der Testmassen weiter vereinfachen.

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} x^a = R_{b00}{}^a x^b \quad (4.4)$$

Um das Verhalten der Testmassen zu beschreiben, sind also nur die Komponenten des Riemannsensors relevant, welche in jedem Block einen zeitlichen Index tragen.

5 Asymptotisch flache Raumzeit

Damit die Betrachtung von isolierten Quellen, wie sie im Kapitel 2 beschrieben wurden, gerechtfertigt ist, werden asymptotisch flache Raumzeiten zur Beschreibung der Phänomene benutzt. Die Idee einer isolierten Quelle ist, dass für einen unendlich entfernten Beobachter die Quelle nicht wahrnehmbar ist. Für Quellen eines Gravitationsfeldes, bedeutet dies, dass die Raumzeit, welche ein unendlich weit entfernter Beobachter wahrnimmt, einer Minkowskiraumzeit entspricht, das heißt die Raumkrümmung ist null. Dieses Konzept lässt sich erweitern, indem die Forderung, dass die Raumkrümmung im Unendlichen verschwindet, abgeschwächt wird und lediglich gefordert wird, dass die Einsteingleichung (3.11) durch eine stationäre Lösung beschrieben werden kann. Asymptotisch flache

¹ Näheres ist in [1] zu finden.

Raumzeiten entsprechen im Unendlichen also einer stationären Raumzeit. Die allgemeinste stationäre Lösung ist die Kerr-Newman-Metrik, für elektrisch geladene rotierende Schwarze Löcher. Von größerer praktischer Bedeutung ist die Kerr-Metrik für ungeladene rotierende Schwarze Löcher.

Bedeutende Arbeit zur asymptotischen Beschreibung von Raumzeiten wurde von Roger Penrose 1963 [6] geleistet. Formal wird ein Punkt einer Raumzeit $\tilde{\mathcal{M}}$ und dessen Umgebung im Unendlichen beschrieben, indem die Raumzeit $\tilde{\mathcal{M}}$ in eine größere Mannigfaltigkeit \mathcal{M} eingebettet wird. Die Raumzeit $\tilde{\mathcal{M}}$, in welcher physikalische Vorgänge beschrieben werden sollen, wird als physikalische Raumzeit und \mathcal{M} als unphysikalische Raumzeit bezeichnet. Die Einbettung erfolgt durch eine konforme Abbildung Ω , sodass $\tilde{\mathcal{M}}$ ein offenes Gebiet von \mathcal{M} ist, vgl. Abbildung 2. Ein Punkt $X \in \partial\tilde{\mathcal{M}}$ auf dem Rand

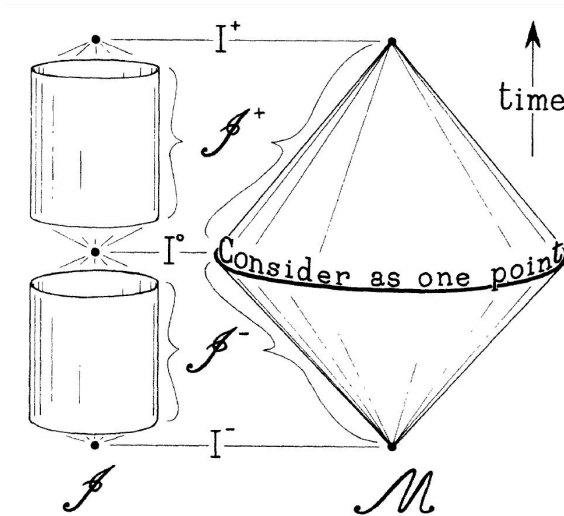


Abbildung 2: Darstellung konformer Unendlichkeit nach Penrose [6]

von $\tilde{\mathcal{M}}$, welcher Punkte im Unendlichen repräsentiert, kann somit als eindeutiger Punkt in \mathcal{M} behandelt werden. Phänomene im Unendlichen von $\tilde{\mathcal{M}}$ werden in einer Umgebung von X behandelt. Die Metriken der physikalischen und unphysikalischen Raumzeiten sind durch die konforme Transformation

$$g_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab} \quad (5.1)$$

miteinander verknüpft. $\partial\tilde{\mathcal{M}}$ lässt sich aufteilen in Punkte, welche räumlich, zeitlich und lichtartig im Unendlichen liegen. Der räumliche Rand von $\tilde{\mathcal{M}}$ wird mit I^0 , der zeitliche mit I^\pm und der lichtartige mit \mathcal{I}^\pm bezeichnet, wobei die Vorzeichen der zeit- und lichtartigen Ränder den Zukunfts- (+) und Vergangenheitslichtkegeln (-) entsprechen. In dieser Darstellung der physikalischen Raumzeit $\tilde{\mathcal{M}}$ haben lichtartige Geodäten stets ihren Ursprung in \mathcal{I}^- und ihren Endpunkt auf \mathcal{I}^+ . Alle zeitartigen Weltlinien entspringen in I^- und enden in I^+ , welche in \mathcal{M} je ein einzelner Punkt sind. Alle unendlich weit in der Vergangenheit liegenden Punkte wurden, in Analogie zur stereographischen Projektion, zu einem einzelnen Punkt I^- zusammen gefasst. Gleiches gilt für alle Punkte in unendlicher Zukunft und unendlicher räumlicher Entfernung, welche zu I^+ bzw. I^0 , zusammen gefasst wurden. Je nach Anwendungsfall werden zur besseren Darstellung manchmal die Punkte I^\pm , ebenso wie I^0 , nicht als einzelne Punkte gezeichnet, sondern als die Endflächen eines Zylinders, vgl. Abbildung 2 links.

6 Retardierte Kugelkoordinaten

In Abbildung 3 wird die Wechselwirkung von Punktteilchen innerhalb des zuvor eingeführten Penrose Diagramm dargestellt. Betrachtet wird die Interaktion der Punktteilchen p_1 und p_2 , welche am Raumzeitpunkt S zu p_3 verschmelzen. Die Gravitationswellen, welche durch die Wechselwirkung der Teilchen entstehen, breiten sich entlang lichtartiger Geodäten aus. Zur Beschreibung dieses Vorgangs bieten sich retardierte Kugelkoordinaten an,

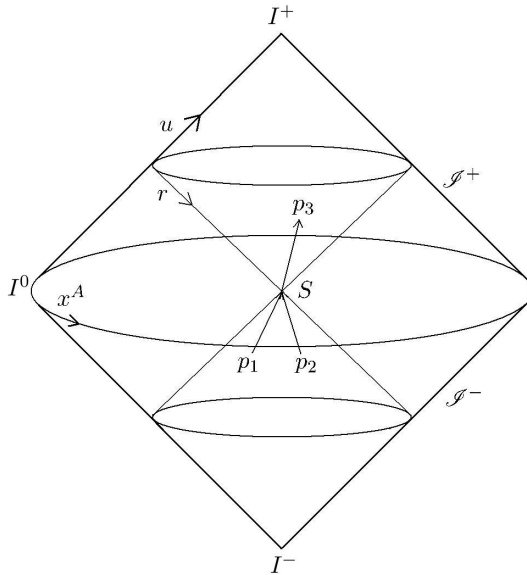


Abbildung 3: Visualisierung eines Raumzeitereignisses in Bondi-Koordinaten

ten an, da die Gravitationswellen von einem Beobachter mit Abstand r zum Punkt S , aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit, nämlich der Lichtgeschwindigkeit, verzögert wahrgenommen werden. Hermann Bondi führte Koordinaten ein, für welche sich entlang der Null Geodäten nur eine Koordinate ändert, vgl. [7] und [8]. Diese Koordinate entspricht dem Abstand r des Beobachters zum Ereignis S . Die Zeitkoordinate wird mit u bezeichnet und steht senkrecht auf r . Somit ist für jedes $u = \text{const.}$ eine Null-Hyperfläche definiert, auf welcher sich Licht und insbesondere Gravitationswellen ausbreiten. In Abbildung 3 entsprechen diese Hyperflächen für das Ereignis $S(u)$ den Lichtkegeln.

Um im Folgenden alle Vorgänge in den soeben eingeführten Koordinaten zu beschreiben, müssen die zuvor eingeführten Entitäten der linearisierten Gravitation in diesen ausgedrückt werden. Ausgangspunkt ist die Minkowskimetrik in kartesischen Koordinaten mit folgender Vorzeichenkonvention und dem Linienelement

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.1)$$

Die Matrixdarstellung lautet

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Zunächst wird in Kugelkoordinaten gewechselt, da die auslaufenden Wellen Kugelwellen sind. Das Linienelement schreibt sich nun als

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 s_{AB} dx^A dx^B, \quad (6.3)$$

wobei s_{AB} die Metrik der Zweisphäre mit den Winkelkoordinaten x^A ist.

Da die Wellen am Ort des Beobachters verzögert eintreffen, wird zur retardierten Zeitkoordinate übergegangen. Konkret wird die Koordinatentransformation

$$u = t - r \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.4)$$

durchgeführt. Aus

$$du = dt - dr, \quad (6.5)$$

folgt für das Linienelement in den transformierten Koordinaten also

$$ds^2 = -du^2 - dudr - drdu + r^2 s_{AB} dx^A dx^B. \quad (6.6)$$

In Matrixschreibweise lautet die Minkowskimetrik nun

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 s_{AB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

sowie deren Inverse

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} s^{AB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

6.1 Christoffelsymbole der Minkowskimetrik

Da nicht mehr in kartesischen Koordinaten, sondern in retardierten Kugelkoordinaten gearbeitet wird, verschwinden auch nicht mehr alle Christoffelsymbole der Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu}$ in den retardierten Kugelkoordinaten (u, r, x^A) . In der im Folgenden verwendeten Notation, bezeichnet $\hat{\Gamma}_{BC}^A$ die Christoffelsymbole der Einheitszweisphäre s_{AB} . Indizes, welche durch griechische Buchstaben notiert werden, laufen über alle vier Koordinaten (u, r, x^A) . Kleine römische Buchstaben notieren lediglich die Koordinaten u und r , große römische Buchstaben, wie bereits angedeutet, nur die zwei Winkelkoordinaten.

Die Christoffelsymbole lauten demnach gemäß (3.5) für $\eta_{\mu\nu}$ mit den Matrixelementen aus (6.7) und (6.8) wie folgt.

$$\Gamma_{uu}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(2 \underbrace{\partial_u \eta_{u\beta}}_{=\text{konst.} \forall \beta} - \partial_\beta \underbrace{\eta_{uu}}_{=\text{konst.}} \right) = 0 \quad (6.9)$$

$$\Gamma_{ur}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\underbrace{\partial_u \eta_{r\beta}}_{=\text{konst.}\forall\beta} + \underbrace{\partial_r \eta_{u\beta}}_{=\text{konst.}\forall\beta} - \underbrace{\partial_\beta \eta_{ur}}_{=\text{konst.}} \right) = 0 \quad (6.10)$$

$$\Gamma_{rr}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(2 \underbrace{\partial_r \eta_{r\beta}}_{=\text{konst.}\forall\beta} - \underbrace{\partial_\beta \eta_{rr}}_{=0} \right) = 0 \quad (6.11)$$

$$\Gamma_{uA}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\underbrace{\partial_u \eta_{A\beta}}_{=\text{unabh. von } u} + \underbrace{\partial_A \eta_{u\beta}}_{=\text{konst.}\forall\beta} - \underbrace{\partial_\beta \eta_{uA}}_{=0} \right) = 0 \quad (6.12)$$

$$\Gamma_{rA}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\underbrace{\partial_r \eta_{A\beta}}_{=0\forall\beta=a} + \underbrace{\partial_A \eta_{r\beta}}_{=\text{konst.}\forall\beta} - \underbrace{\partial_\beta \eta_{rA}}_{=0} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\alpha C} \partial \eta_{AC} = r \eta^{\alpha C} s_{AC} \quad (6.13)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{rA}^a = 0, \quad \Gamma_{rA}^B = \frac{1}{r} s^{BC} s_{AC} = \frac{1}{r} \delta_A^B$$

$$\Gamma_{AB}^u = \frac{1}{2} \underbrace{\eta^{ur}}_{=-1} \left(\underbrace{\partial_A \eta_{Br}}_{=0} + \underbrace{\partial_B \eta_{Ar}}_{=0} - \partial_r \eta_{AB} \right) = r s_{AB} \quad (6.14)$$

$$\Gamma_{AB}^r = \frac{1}{2} \eta^{ra} \left(\underbrace{\partial_A \eta_{Ba}}_{=0} + \underbrace{\partial_B \eta_{Aa}}_{=0} - \underbrace{\partial_a \eta_{AB}}_{=\text{unabh. von } u} \right) \stackrel{a=r}{=} -r s_{AB} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{BC}^A &= \frac{1}{2} \eta^{AD} \left(\partial_B \eta_{CD} + \partial_C \eta_{BD} - \partial_D \eta_{BC} \right) = \frac{1}{2} s^{AD} \left(\partial_B s_{CD} + \partial_C s_{BD} - \partial_D s_{BC} \right) \\ &= \hat{\Gamma}_{BC}^A \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.2 Linearisierte Christoffelsymbole

Die linearisierten Christoffelsymbole $\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, welche im Allgemeinen nicht verschwinden und nicht mit den Christoffelsymbolen der Hintergrundmetrik übereinstimmen, lassen sich in den zuvor gewählten Koordinaten, vgl. Kapitel 6, ausdrücken. Dazu wird zunächst die kovariante Ableitung ∇_α in (3.10) unter Verwendung von (3.13) in die gewöhnliche Koordinatenableitung ∂_α überführt

$$\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} \left(\nabla_\beta \gamma_{\gamma\delta} + \nabla_\gamma \gamma_{\beta\delta} - \nabla_\delta \gamma_{\beta\gamma} \right) \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} \left(\partial_\beta \gamma_{\gamma\delta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon \gamma_{\epsilon\delta} - \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon \gamma_{\gamma\epsilon} + \partial_\gamma \gamma_{\beta\delta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \gamma_{\epsilon\delta} - \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \gamma_{\beta\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\delta \gamma_{\beta\gamma} + \Gamma_{\delta\beta}^\epsilon \gamma_{\epsilon\gamma} + \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \gamma_{\beta\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\left(\partial_\beta\gamma_{\gamma\delta} + \partial_\gamma\gamma_{\beta\delta} - \partial_\delta\gamma_{\beta\gamma} - 2\Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon\gamma_{\delta\varepsilon}\right). \quad (6.19)$$

Damit ergeben sich die linearisierten Christoffelsymbole zu

$$\delta\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}\eta^{ad}\left(\partial_b\gamma_{cd} + \partial_c\gamma_{bd} - \partial_d\gamma_{bc}\right) \quad (6.20)$$

$$\delta\Gamma_{Bc}^a = \frac{1}{2}\eta^{ad}\left(\hat{D}_B\gamma_{cd} + \partial_c\gamma_{Bd} - \partial_d\gamma_{Bc} - \frac{2}{r}\gamma_{Bd}(\partial_c r)\right) \quad (6.21)$$

$$\delta\Gamma_{BC}^a = \frac{1}{2}\eta^{ad}\left(\hat{D}_B\gamma_{Cd} + \hat{D}_C\gamma_{Bd} - \partial_d\gamma_{BC} + 2r s_{BC}\gamma_{de}(\partial^e r)\right) \quad (6.22)$$

$$\delta\Gamma_{bc}^A = \frac{1}{2}\eta^{AD}\left(\partial_b\gamma_{cD} + \partial_c\gamma_{bD} - \hat{D}_D\gamma_{bc}\right) \quad (6.23)$$

$$\delta\Gamma_{Bc}^A = \frac{1}{2}\eta^{AD}\left(\hat{D}_B\gamma_{cD} + \partial_c\gamma_{BD} - \hat{D}_D\gamma_{Bc} - \frac{2}{r}\gamma_{DB}(\partial_c r)\right) \quad (6.24)$$

$$\delta\Gamma_{BC}^A = \frac{1}{2}\eta^{AD}\left(\hat{D}_B\gamma_{CD} + \hat{D}_C\gamma_{BD} - \hat{D}_D\gamma_{BC} + 2r s_{BC}\gamma_{De}(\partial^e r)\right), \quad (6.25)$$

wobei \hat{D}_A die kovariante Ableitung auf der Zweispähre s_{AB} bezeichnet.

6.3 Linearisierter Riemanntensor

Analog zu den Christoffelsymbolen lässt sich ebenfalls der linearisierte Riemanntensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in retardierten Kugelkoordinaten ausdrücken. Aus der allgemeinen Form (3.16) ergibt sich nach Transformation der kovarianten Ableitung (3.13) der linearisierte Riemanntensor allgemein zu

$$\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = -\partial_\alpha\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\delta + \partial_\beta\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon\delta\Gamma_{\beta\varepsilon}^\delta - \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\delta\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon - \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon\delta\Gamma_{\alpha\varepsilon}^\delta + \Gamma_{\beta\varepsilon}^\delta\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon. \quad (6.26)$$

Die Komponenten des Riemanntensors lassen sich aus den zuvor bestimmten Christoffelsymbolen der Minkowskimetrik (6.9) f.f. und den linearisierten Christoffelsymbolen (6.20) f.f. bestimmen. Unter Ausnutzung der Symmetrie des Riemanntensors

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\beta\alpha\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (6.27)$$

genügt es sechs Ausdrücke zu berechnen, welche den Riemanntensor vollständig charakterisieren.

Mit Hinblick auf die nachfolgenden Rechnungen wird der linearisierte Riemanntensor (3.16) in eine Form, sodass er ausschließlich kovariante Indizes trägt, überführt.

$$\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\delta\varepsilon}\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\varepsilon \quad (6.28)$$

Die Komponenten werden wie zuvor in Winkel-, notiert mit großen römischen Buchstaben, sowie radiale und zeitliche, notiert mit kleinen römischen Buchstaben, Koordinaten ausgedrückt und lauten für die gewählte Karte, gemäß (6.26)

$$\delta R_{abcd} = 2\eta_{de}\partial_{[b}\delta\Gamma_{a]c}^e \quad (6.29)$$

$$= \eta_{de}\eta^{ef}\left[\partial_c\partial_{[b}\gamma_{a]f} + \partial_f\partial_{[a}\gamma_{b]c}\right] = \partial_c\partial_{[b}\gamma_{a]d} + \partial_d\partial_{[a}\gamma_{b]c} \quad (6.30)$$

$$\delta R_{Abcd} = \eta_{de}\left[2\partial_{[b}\delta\Gamma_{A]c}^e + \Gamma_{Ac}^\zeta\delta\Gamma_{cb}^e - \Gamma_{Ac}^e\delta\Gamma_{bc}^\zeta\right] \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} &= \partial_b\partial_{[c}\gamma_{d]A} + \hat{D}_A\partial_{[d}\gamma_{c]b} \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\partial_b\gamma_{A[c}(\partial_{d]}r) + \hat{D}_A\gamma_{b[d}(\partial_{c]}r) + \partial_{[c]}\gamma_{Ab}(\partial_{d]}r)\right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\delta R_{ABcd} = \eta_{de}\left[2\hat{D}_{[B}\delta\Gamma_{A]c}^e + \Gamma_{Ac}^F\delta\Gamma_{FB}^e + \Gamma_{FB}^e\delta\Gamma_{Ac}^F - \Gamma_{Bc}^F\delta\Gamma_{FA}^e - \Gamma_{FA}^e\delta\Gamma_{BC}^F\right] \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{D}_{[B}\hat{D}_{A]}\gamma_{cd} + \partial_c\hat{D}_{[B}\gamma_{A]d} + \partial_d\hat{D}_{[A}\gamma_{B]c} \\ &\quad + \frac{2}{r}\left[\hat{D}_{[A}\gamma_{B]d}(\partial_{c}r) + \hat{D}_{[B}\gamma_{A]c}(\partial_{d}r)\right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\delta R_{Abcd} = \eta_{de}\left[-\hat{D}_A\delta\Gamma_{bc}^e + \partial_b\delta\Gamma_{AC}^e + \Gamma_{AC}^f\delta\Gamma_{fb}^e - \Gamma_{bc}^F\delta\Gamma_{AF}^e - \Gamma_{AF}^e\delta\Gamma_{bc}^F\right] \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{D}_C\partial_{[b}\gamma_{A]d} + \frac{1}{2}\partial_d\left(\hat{D}_A\gamma_{bc} - \partial_b\gamma_{AC}\right) + rs_{AC}\left(\frac{1}{2}\partial_d\gamma_{be} + \partial_{[b}\gamma_{e]d}\right)(\partial^e r) \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\hat{D}_{[C}\gamma_{A]b}(\partial_{d}r) + \hat{D}_{[A}\gamma_{C]d}(\partial_{b}r) + \partial_{[d]}\gamma_{AC}(\partial_{b]}r)\right] \\ &\quad - \frac{1}{r^2}\gamma_{AC}(\partial_{b}r)(\partial_{d}r) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\delta R_{ABCd} = \eta_{de}\left[2\hat{D}_{[B}\delta\Gamma_{A]C}^e + \Gamma_{AC}^f\delta\Gamma_{fB}^e + \Gamma_{BF}^e\delta\Gamma_{AC}^f - \Gamma_{BC}^f\delta\Gamma_{Af}^e - \Gamma_{AF}^e\delta\Gamma_{BC}^f\right] \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{D}_{[B}\hat{D}_{A]}\gamma_{Cd} + \hat{D}_C\hat{D}_{[B}\gamma_{A]d} + \partial_d\hat{D}_{[A}\gamma_{B]C} \\ &\quad + rs_{BC}\left[\partial_{[e}\gamma_{d]A} - \frac{1}{2}\hat{D}_A\gamma_{de}\right](\partial_{d}r) + rs_{AC}\left[\partial_{[d}\gamma_{e]B} + \frac{1}{2}\hat{D}_B\gamma_{de}\right](\partial^e r) \\ &\quad + \frac{2}{r}\hat{D}_{[B}\gamma_{A]C}(\partial_{d}r) + 2s_{C[A}\gamma_{B]d} + s_{C[B}\gamma_{A]e}(\partial_{d}r)(\partial^e r) \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\delta R_{ABCD} = \eta_{DE}\left[\hat{D}_{[B}\delta\Gamma_{A]C}^E + \Gamma_{AC}^f\delta\Gamma_{Bf}^E + \Gamma_{Bf}^E\delta\Gamma_{AC}^f - \Gamma_{BC}^f\delta\Gamma_{Af}^E - \Gamma_{Af}^E\delta\Gamma_{BC}^f\right] \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{D}_{[B} \hat{D}_{A]} \gamma_{CD} + \hat{D}_A \hat{D}_{[D} \gamma_{C]B} + \hat{D}_B \hat{D}_{[C} \gamma_{D]A} \\
&\quad + r \left[s_{AC} \left(\hat{D}_{(D} \gamma_{B)e} - \frac{1}{2} \partial_e \gamma_{BD} \right) - s_{BC} \left(\hat{D}_{(A} \gamma_{D)e} - \frac{1}{2} \partial_e \gamma_{AD} \right) \right] (\partial^e r) \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[s_{BD} \left(\hat{D}_{(A} \gamma_{C)e} - \frac{1}{2} \partial_e \gamma_{AC} \right) + s_{AD} \left(-\hat{D}_{(B} \gamma_{C)e} + \partial_e \gamma_{BC} \right) \right] (\partial^e r) \\
&\quad + 2s_{C[A} \gamma_{B]D} + 2r^2 s_{D[B} s_{A]C} \gamma_{ef} (\partial^e r) (\partial^f r),
\end{aligned} \tag{6.40}$$

wobei, um die Notation übersichtlicher zu halten, die Äquivalenz $\hat{D}_A \gamma_{bc} = \partial_A \gamma_{bc}$ ausgenutzt wurde, um die kovarianten Ableitungen \hat{D}_A auf der Zweispähre ebenfalls durch die partielle Ableitung ∂_A auszudrücken, sofern sie auf keine Winkelkoordinaten der Störung wirken. Eine ausführliche Berechnung findet sich in Appendix A.1.

7 Lösung der Einsteingleichung

Wie im Kapitel 3.3 beschrieben, kann der Energie-Impuls-Tensor mit der Störung der Metrik in Verbindung gebracht werden. Im Folgenden wird dieser Zusammenhang für die Fälle von nicht rotierenden, sowie rotierenden Teilchen in retardierten Kugelkoordinaten berechnet.

7.1 Quellteilchen ohne Drehimpuls

Es wird die linearisierte Einsteingleichung $\nabla^\gamma \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}$, vgl. (3.23), gelöst, wobei $h_{\alpha\beta}$ die spurkorrigierte Störung der Metrik nach (3.22) und $T_{\alpha\beta}$ der Energie-Impuls-Tensor (2.1) ist. Für eine detaillierte Herleitung siehe [1]. Die Rechnung wird zunächst mit dem Teilchenimpuls $(p^\alpha) = m(1, 0, 0, 0)$ ausgeführt und das Ergebnis anschließend durch eine Lorentz-Transformation auf beliebige Impulse verallgemeinert. Um in der Notation konsistent zu bleiben, werden gestrichene Variablen in den Koordinaten x'^α , in welchen der Impuls obige Form annimmt, und ungestrichene Variablen für Koordinaten x^α , in welchen die Impulse die allgemeine Form $(p^\alpha) = (E, p_1, p_2, p_3)$ annehmen, verwendet, wobei E die Energie des Teilchens und $r = |\vec{x}|$ den Abstand zu einem Beobachter bezeichnet.

$$h'_{\alpha\beta} = 8 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x'' \Theta(t' - t'') \delta((t' - t'')^2 - \|\vec{x}' - \vec{x}''\|^2) \int_0^\infty d\tau p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \delta(x'' - \tau) \tag{7.1}$$

$$= 8 \int_0^{\infty} d\tau \Theta(t' - \tau) \delta((t' - \tau)^2 - |\vec{r}'|^2) p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \quad (7.2)$$

$$\stackrel{s=t'-\tau}{=} -8 \int_{t'}^{-\infty} ds \Theta(s) \frac{1}{2r'} [\delta(s - r') + \delta(s + r')] p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \quad (7.3)$$

$$= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{r'} \Theta(t' - s) \Theta(s) [\delta(s - r') + \delta(s + r')] p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \quad (7.4)$$

$$= \frac{4}{r'} [\Theta(t' - r') \Theta(r') + \underbrace{\Theta(r' + t') \Theta(-r')}_{=0}] p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \quad (7.5)$$

$$= 4 \frac{\Theta(u')}{r'} p'_{(\alpha} u'_{\beta)} \quad (7.6)$$

Die Rechnung wurde nur für ein auslaufendes Teilchen aus (2.1), stellvertretend für den vollen Energie-Impuls-Tensor, ausgeführt. Der volle Störungsterm lautet für k einlaufende und l auslaufende Teilchen

$$h'_{\alpha\beta} = \frac{4}{r'} \left[\sum_{i=1}^k \Theta(-u') p'_{i(\alpha} u'_{i\beta)} + \sum_{j=1}^l \Theta(u') p'_{j(\alpha} u'_{j\beta)} \right], \quad (7.7)$$

Um das Ergebnis für allgemeine Koordinaten zu erhalten, werden aus folgender Transformation die relevanten Komponenten r' und t' gewonnen.

$$x' = \Lambda x = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{p_1}{m} & -\frac{p_2}{m} & -\frac{p_3}{m} \\ -\frac{p_1}{m} & & & \\ -\frac{p_2}{m} & \delta_{ij} + \frac{E-1}{p^2} p_i p_j & & \\ -\frac{p_3}{m} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E}{m} t - \frac{\vec{p}\vec{x}}{m} \\ -\frac{p_1}{m} t + x_1 + \frac{E-1}{p^2} (p_1^2 x_1 + p_1 p_2 x_2 + p_1 p_3 x_3) \\ -\frac{p_2}{m} t + x_2 + \frac{E-1}{p^2} (p_2 p_1 x_1 + p_2^2 x_2 + p_2 p_3 x_3) \\ -\frac{p_3}{m} t + x_3 + \frac{E-1}{p^2} (p_3 p_1 x_1 + p_3 p_2 x_2 + p_3^2 x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Es ergeben sich nach einer länglichen aber trivialen Rechnung, welche hier nicht gezeigt wird, r' und t' zu

$$t' = \frac{E}{m} t - \frac{\vec{p}\vec{x}}{m} = \frac{E}{m} (u + r) - \frac{p}{m} r \cos(\theta) \quad (7.10)$$

$$r' = r \left[\frac{(E - p \cos(\theta))^2}{m^2} + 2 \frac{u}{r} \frac{p}{m^2} (p - E \cos(\theta)) + \frac{u^2}{r^2} \frac{p^2}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.11)$$

wobei $\vec{p}\vec{x} = pr \cos(\theta)$, mit $p \equiv |\vec{p}|$, $r \equiv |\vec{x}|$, θ der Winkel zwischen Impulsvektor des Teilchens und Ortsvektor eines Beobachters im euklidischen Raum, und (6.4) verwendet wurde.

Um aus (7.7) die Störung in den zuvor eingeführten retardierten Kugelkoordinaten (6.6) zu gewinnen, muss der Impuls p_α mit $\alpha \in (t, x_1, x_2, x_3)$ zu p_α mit $\alpha \in (u, r, A, B)$ transformiert werden. Dazu wird der Winkelanteil des Skalarprodukts $\vec{p}\vec{x}$ als eine Kugelflächenfunktion $f(\hat{z}) = \hat{z}\hat{p}$ des Einheitsvektors des Impulses \hat{p} und \hat{z} geschrieben, sodass gilt

$$p_\alpha x^\alpha = -E(u + r) + pr f(\hat{z}). \quad (7.12)$$

Für die Koordinatentransformation des Impulses ergibt sich

$$p_u = \partial_u(p_\alpha x^\alpha) = -E \quad (7.13)$$

$$p_r = \partial_r(p_\alpha x^\alpha) = -E + pf(\hat{z}) \quad (7.14)$$

$$p_A = \partial_A(p_\alpha x^\alpha) = pr \hat{D}_A f(\hat{z}). \quad (7.15)$$

Daraus lassen sich die Komponenten von $h_{\alpha\beta}$ eines auslaufenden Teilchens gemäß (7.7) bestimmen, wobei nun das Argument der Funktion f nicht mehr explizit notiert wird und $p^\alpha = mu^\alpha$ verwendet wurde.

$$h_{uu} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} E^2 \quad (7.16)$$

$$h_{ur} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} (E^2 - Epf) \quad (7.17)$$

$$h_{rr} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} (pf - E)^2 \quad (7.18)$$

$$h_{uA} = -\frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} Epr \hat{D}_A f \quad (7.19)$$

$$h_{rA} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} (p^2 r f \hat{D}_A f - Epr \hat{D}_A f) \quad (7.20)$$

$$h_{AB} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} p^2 r^2 (\hat{D}_A f)(\hat{D}_B f) \quad (7.21)$$

Nach der Rücktransformation (3.22) lauten die Komponenten der Störung $\gamma_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{uu} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{2r'} (E^2 + p^2 f^2 + p^2 s^{AB} (\hat{D}_A f)(\hat{D}_B f)) \quad (7.22)$$

$$\gamma_{ur} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{2r'} (-2Epf + E^2 + p^2 f^2 + p^2 s^{AB} (\hat{D}_A f)(\hat{D}_B f)) \quad (7.23)$$

$$\gamma_{rr} = h_{rr} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} (E^2 - 2Epf + p^2 f^2) \quad (7.24)$$

$$\gamma_{Au} = h_{Au} = -\frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} r \left(Ep \hat{D}_A f \right) \quad (7.25)$$

$$\gamma_{Ar} = h_{Ar} = \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} r \left(p^2 f \hat{D}_A f - Ep \hat{D}_A f \right) \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{AB} = & \frac{4}{m} \frac{\Theta(u')}{2r'} r^2 \left(E^2 s_{AB} - p^2 f^2 s_{AB} + 2p^2 (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\ & \left. - p^2 s_{AB} s^{CD} (\hat{D}_C f) (\hat{D}_D f) \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Unter Ausnutzung der Beziehung $s^{AB} (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) = 1 - f^2$ für Kugelflächenfunktionen vereinfachen sich γ_{uu} , γ_{ur} und γ_{AB} zu

$$\gamma_{uu} = \frac{2}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} \left(E^2 + p^2 \right) \quad (7.28)$$

$$\gamma_{ur} = \frac{2}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} \left(E^2 + p^2 - 2Ep f \right) \quad (7.29)$$

$$\gamma_{AB} = \frac{2}{m} \frac{\Theta(u')}{r'} r^2 \left(2p^2 (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) + m^2 s_{AB} \right). \quad (7.30)$$

Damit kann nun $\gamma_{\alpha\beta}$ in Potenzen von $\frac{u}{r}$ entwickelt werden. Dazu wird die Wurzel im Term $\frac{1}{r'}$, vgl. (7.11), in $\frac{u}{r}$ entwickelt. u' wird analog zu (6.4) aus den Ausdrücken (7.10) und (7.11) gebildet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} = & \frac{1}{r} \left[\frac{m}{(E - pf)} - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{mp(p - Ef)}{(E - pf)^3} + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \frac{2mp^2(p - Ef)^2 - m^3 p^2(1 - f^2)}{2(E - pf)^5} \right. \\ & \left. + O\left(\frac{u}{r} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} u' = & \frac{E}{m} (u + r) - \frac{p}{m} r f - r \frac{(E - pf)}{m} \left[1 + \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p(p - Ef)}{(E - pf)^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \frac{m^2 p^2 (1 - f^2)}{2(E - pf)^4} + O\left(\frac{u}{r} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$= u \left[\frac{m}{E - pf} + \left(\frac{u}{r} \right) \frac{mp^2(1 - f^2)}{2(E - pf)^3} + O\left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] \quad (7.33)$$

Die Komponenten des Störungsterms, bis zur Ordnung $O(r^{-2})$ entwickelt, lautet für ein auslaufendes Teilchen

$$\gamma_{uu} = \frac{2\Theta(u)}{r} \left(E^2 + p^2 \right) \left[\frac{1}{(E - pf)} - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p(p - Ef)}{(E - pf)^3} + O\left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] \quad (7.34)$$

$$\gamma_{ur} = \frac{2\Theta(u)}{r} (E^2 + p^2 - 2Epf) \left[\frac{1}{(E - pf)} - \left(\frac{u}{r}\right) \frac{p(p - Ef)}{(E - pf)^3} + O\left(\frac{u}{r}\right)^2 \right] \quad (7.35)$$

$$\gamma_{rr} = \frac{4\Theta(u)}{r} \left[(E - pf) - \left(\frac{u}{r}\right) \frac{p(p - Ef)}{(E - pf)} + O\left(\frac{u}{r}\right)^2 \right] \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{uA} = -4\Theta(u)Ep(\hat{D}_Af) & \left[\frac{1}{(E - pf)} - \frac{u p(p - Ef)}{r (E - pf)^3} \right. \\ & \left. + \left(\frac{u}{r}\right)^2 \frac{2p^2(p - Ef)^2 - m^2p^2(1 - f^2)}{2(E - pf)^5} + O\left(\frac{u}{r}\right)^3 \right] \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rA} = -4\Theta(u)p(\hat{D}_Af) & \left[1 - \frac{u p(p - Ef)}{r (E - pf)^2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{u}{r}\right)^2 \frac{2p^2(p - Ef)^2 - m^2p^2(1 - f^2)}{2(E - pf)^4} + O\left(\frac{u}{r}\right)^3 \right] \end{aligned} \quad (7.38)$$

Warum es genügt die Komponenten γ_{AB} der Störung nur bis zur Ordnung $O(1)$ in r^{-1} zu entwickeln, wird später bei der Berechnung des Riemantensors klar werden.

$$\begin{aligned} \gamma_{AB} = 2\Theta(u)r(2p^2(\hat{D}_Af)(\hat{D}_Bf) + m^2s_{AB}) & \left[\frac{1}{E - pf} - \frac{u p(p - Ef)}{r (E - pf)^3} \right. \\ & \left. + O\left(\frac{u}{r}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.39)$$

7.2 Quellteilchen mit Drehimpuls

Für drehimpulsbehaftete Teilchen gleicht die Rechnung für die Terme, welche keine Drehimpulsbeiträge beinhalten, dem drehimpulslosen Fall, sodass im Folgenden nur die Rechnung über Terme, welche im drehimpulslosen Fall nicht auftreten, ausgeführt wird, vergleiche dazu die Energie-Impuls-Tensoren (2.1) und (2.7). Die vollen Ausdrücke der Komponenten der Störung, unter Berücksichtigung der Drehimpulse der Quellteilchen, ergeben sich durch eine Addition der spurkorrigierten Störung $h_{\alpha\beta}$ des drehimpulslosen Falls und den im Folgenden berechneten Termen $h_{(\text{spin})\alpha\beta}$. Der Drehimpulsanteil der Störung wird, wie zuvor im Kapitel 7.1, zunächst mit dem Impuls $p' = m(1, 0, 0, 0)$

berechnet und die Rechnung wieder nur für ein auslaufendes Teilchen ausgeführt.

$$h'_{(\text{spin})\alpha\beta} = -8 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x'' \Theta(t' - t'') \delta((t' - t'')^2 - \|\vec{x}' - \vec{x}''\|^2) \cdot \nabla''_\gamma \int_0^\infty d\tau S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} \delta(x'' - \tau) \quad (7.40)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x'' \int_0^\infty d\tau \nabla''_\gamma \left[\Theta(t' - t'') \delta((t' - t'')^2 - \|\vec{x}' - \vec{x}''\|^2) \right] \cdot \delta(x'' - \tau) \quad (7.41)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} \int_0^\infty d\tau \nabla'_\gamma \left[\Theta(t' - \tau) \delta((t' - \tau)^2 - \|\vec{x}'\|^2) \right] \quad (7.42)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} \int_0^\infty d\tau \left[\delta_\gamma^0 \delta(t' - \tau) \delta((t' - \tau)^2 - r'^2) + \Theta(t' - \tau) \nabla'_c \delta((t' - \tau)^2 - r'^2) \right] \quad (7.43)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} \int_0^\infty d\tau \Theta(t' - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\delta((t' - \tau)^2 - r'^2) \right] \frac{x'_\gamma}{(t' - \tau)} \quad (7.44)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} x'_\gamma \int_{-\infty}^\infty d\tau \frac{\Theta(\tau) \Theta(t' - \tau)}{t' - \tau} \frac{d}{d\tau} \delta((t' - \tau)^2 - r'^2) \quad (7.45)$$

$$\stackrel{s=t'-\tau}{=} -8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} x'_\gamma \int_{-\infty}^\infty ds \frac{\Theta(t' - s) \Theta(s)}{s} \frac{d}{ds} \delta(s^2 - r'^2) \quad (7.46)$$

$$= 8S'^\gamma_{(\alpha u'_\beta)} x'_\gamma \int_{-\infty}^\infty ds \left[\frac{\delta(t' - s) \Theta(s)}{s} + \frac{\Theta(t' - s) \delta(s)}{s} - \frac{\Theta(t' - s) \Theta(s)}{s^2} \right] \cdot \frac{\delta(s - r') + \delta(s + r')}{2r'} \quad (7.47)$$

$$= 4S'^{\gamma}{}_{(\alpha}u'_{\beta)}x'_{\gamma} \left[\frac{\delta(t' - r')\Theta(r')}{r'} - \frac{\delta(r' + t')\Theta(-r')}{r'} + \frac{\Theta(t' - r')\delta(r')}{r'} \right. \\ \left. - \frac{\Theta(r' + t')\delta(-r')}{r'} - \frac{\Theta(t' - r')\Theta(r')}{r'^3} + \frac{\Theta(r' + t')\Theta(-r')}{r'^3} \right] \quad (7.48)$$

$$= -4S'^{\gamma}{}_{(\alpha}u'_{\beta)}x_{\gamma} \frac{\Theta(u')}{r'^3} \quad (7.49)$$

Nach Übergang in ein globales Inertialsystem mit retardierten Kugelkoordinaten, vgl. Kapitel 6, ergibt sich analog zum drehipulslosen Fall die spurkorrigierte Störung, welche in Potenzen von $\frac{u}{r}$ entwickelt wird, aus den Gleichungen (7.31) und (7.33).

Im Allgemeinen ist für ein rotierendes Teilchen der Impuls nur im Ruhesystem des Teilchens tangential zu seiner Weltlinie, vgl. (2.10). Dies bedeutet, dass das Massenzentrum beobachterabhängig ist. Wird mit dem Massenzentrum der Aufenthaltsort identifiziert, ist dieser nicht eindeutig festgelegt. Um ein eindeutig bestimmtes System zu erhalten, müssen also weitere Bedingungen an den Drehimpuls gestellt werden. Es existieren verschiedene Zusatzbedingungen, ein Überblick über die Eigenschaften der verschiedenen Bedingungen ist in [16] gegeben. Diese Hilfsbedingungen wählen gewissermaßen eine Weltlinie eines Beobachters aus und legen diese, als die für dieses Teilchen assoziierte Weltlinie, für alle Beobachter fest. In dieser Arbeit wird der Bedingung

$$S^{\alpha\beta}p_{\beta} = 0, \quad (7.50)$$

nach Tulczyjew und Dixon gefolgt.

Des Weiteren wird ein Drehimpulsvektor $S_i^{\alpha} = (S_i^0, \vec{S}_i)$ eingeführt, welcher definiert ist durch

$$S_{i\alpha\beta} = \frac{1}{m} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_i^{\gamma} S_i^{\delta}, \quad (7.51)$$

wobei $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-\det(g)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$ ist. Der Drehimpulsterm für ein auslaufendes Teilchen lautet nach diesen Schritten

$$h_{(\text{spin})\alpha\beta} = -4 \frac{\Theta(u)}{m^2 r^3} \epsilon_{\gamma(\alpha|\delta} p^{\delta} S^{\nu} p_{|\beta)} x^{\gamma} \left[\frac{m^3}{(E - pf)^3} - \left(\frac{u}{r}\right) \frac{3m^3 p(p - Ef)}{(E - pf)^5} \right. \\ \left. + O\left(\frac{u}{r}\right)^2 \right]. \quad (7.52)$$

Ist der Drehimpulsvektor eines Teilchens in dessen Ruhesystem gegeben, wird dieser durch eine Lorentz-Transformation in ein beliebiges Inertialsystem überführt. Sei S'^{α} der Viererdrehimpulsvektor im Ruhesystem, so bestimmt sich der Viererdrehimpulsvektor S^{α} im transformierten Koordinatensystem gemäß

$$S^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} S'^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p_1}{m} & \frac{p_2}{m} & \frac{p_3}{m} \\ \frac{p_1}{m} & \delta_{11} + \frac{E-1}{p^2} p_1 p_1 & & \\ \frac{p_2}{m} & & \delta_{22} + \frac{E-1}{p^2} p_2 p_2 & \\ \frac{p_3}{m} & & & \delta_{33} + \frac{E-1}{p^2} p_3 p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'^0 \\ S'^1 \\ S'^2 \\ S'^3 \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

Aus der Bedingung²

$$S^\alpha p_\alpha = -ES^0 + \vec{S}\vec{p} = 0, \quad (7.54)$$

folgt mit $(p'^\alpha) = m(1, 0, 0, 0)$ für $S'^0 = 0$. Dies in (7.53) eingesetzt, liefert

$$S^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\vec{p}\vec{S}' \\ S'^1 + \frac{\gamma-1}{p^2}p_1(\vec{p}\vec{S}') \\ S'^2 + \frac{\gamma-1}{p^2}p_2(\vec{p}\vec{S}') \\ S'^3 + \frac{\gamma-1}{p^2}p_3(\vec{p}\vec{S}') \end{pmatrix} = \left(\vec{S}' + \frac{1}{m}\vec{p}\vec{S}' \right). \quad (7.55)$$

Es kann gezeigt werden, dass der Winkel zwischen dem räumlichen Drehimpulsvektor im Ruhesystem des Teilchens \vec{S}' und der Boostichtung gleich dem Winkel zwischen Dreierdrehimpulsvektor und Impuls im Koordinatensystem eines bewegten Beobachters ist. Dazu wird das Skalarprodukt des räumlichen Anteils des Drehimpulsvektors \vec{S} aus (7.55) mit dem Dreierimpuls \vec{p} des Teilchens gebildet. Ebenfalls wird die Lorentz-Invariante \mathbf{S} eingeführt, welche das Längenquadrat des Viererdrehimpulsvektors bezeichnet

$$\mathbf{S}^2 = S^\alpha S_\alpha. \quad (7.56)$$

\hat{S}' bezeichnet den normierten Richtungsvektor des Dreierdrehimpulsvektors im Ruhesystem und \hat{p} den normierten Richtungsvektor des Dreierimpulses. Das Skalarprodukt des räumlichen Teils von (7.55) mit dem Dreierimpuls des Teilchens lautet damit

$$\vec{S}\vec{p} = \left(\vec{S}' + (\gamma - 1)(\hat{p}\vec{S}')\hat{p} \right) = \gamma \mathbf{S}ph(\hat{z}), \quad (7.57)$$

wobei $|\vec{S}'| = \mathbf{S}$ ausgenutzt und die Funktion $h(\hat{z}) = \hat{S}'\hat{p}$ eingeführt wurde. Wird (7.54) im Ruhesystem des Teilchens ausgewertet, so ist ersichtlich, dass sich $\vec{S}\vec{p}$ und $\vec{S}'\vec{p}$ lediglich durch den γ -Faktor des Teilchens im bewegten Bezugssystem unterscheiden.

Für die folgenden Rechnungen, müssen die Komponenten des Drehimpulsvektors ebenfalls in Bondi-Koordinaten ausgedrückt werden. Analog zur Transformation der Impulse (7.13) f.f., geschieht dies gemäß

$$S_\alpha = \partial_\alpha(S^\beta x_\beta) = \partial_\alpha \left(S^0(-u - r) + \vec{S}\vec{x} \right), \quad (7.58)$$

wobei analog die Funktion $g(\hat{z}) = \hat{S}\hat{r}$ eingeführt wurde, die aus dem Skalarprodukt des dreidimensionalen Einheitsvektors des Drehimpulses \hat{S} und dem Einheitsortsvektor \hat{r} eines Beobachters gebildet wird. Im folgenden wird das Argument von $g(\hat{z})$ nicht mehr explizit notiert und $|\vec{S}'| \equiv S$ verwendet. Die Komponenten des Drehimpulsvektors S^α in Bondi-Koordinaten lauten somit

$$S^u = \eta^{ua} S_a = -S_r = S^0 - Sg \quad (7.59)$$

² Dies folgt aus der Bedingung (7.50), hier in abstrakter Indexnotation, $S^{ab}p_b = 0$. Wird (7.51) umgeschrieben zu $S^a = \frac{1}{m}\epsilon^{abcd}p_b S_{dc}$ und wieder in (7.51) eingesetzt, so ergibt sich die Bedingung $\frac{p_a}{m}p_b S^b = 0$, welche offensichtlich im Ruhesystem des Teilchens mit $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ erfüllt ist. Für beliebige Bezugssysteme mit Teilchenimpuls p^a folgt also $S^a p_a = 0$.

$$S^r = \eta^{ra} S_a = -S_u + S_r = Sg \quad (7.60)$$

$$S^A = \eta^{AB} S_B = \frac{1}{r} S \hat{D}^A g. \quad (7.61)$$

Für die folgenden Rechnungen ist es sinnvoll die Winkelkomponenten des Drehimpulsvektors in eine Form, unabhängig von r , zu überführen. Diese Komponenten werden mit \hat{S}^A notiert und der Wechsel zwischen Ko- und Kontravairanz der Indizes erfolgt mit der Metrik der Einheitszweispähre s_{AB} .³

$$\hat{S}^A = S \hat{D}^A g \quad (7.62)$$

Aus (7.54) lässt sich für die Komponenten des Drehimpulsvektors in Bondi-Koordinaten, mit Hilfe von (7.13) f.f., folgender Zusammenhang gewinnen.

$$S^r = S^u \left(\frac{-E}{E - pf} \right) + S^A \frac{pr}{E - pf} (\hat{D}_A f) \quad (7.63)$$

Damit lassen sich die Komponenten des Riemantensors ausschließlich durch die Drehimpulskomponenten S^u und S^A darstellen.

Die Komponenten des Ortsvektors einer Beobachterin, wie er in (7.49) auftritt, lautet gemäß

$$x_\alpha = -\frac{1}{2} \partial_\alpha (2ur + u^2) \quad (7.64)$$

in Bondi-Koordinaten

$$x_u = -(u + r) \quad (7.65)$$

$$x_r = -u \quad (7.66)$$

$$x_A = 0. \quad (7.67)$$

Explizit lauten die Komponenten des Drehimpulsanteils der spurkorrigierten Störung für ein auslaufendes Teilchen in Bondi-Koordinaten

$$h_{(\text{spin})uu} = -\kappa \frac{Ep}{r^2} \hat{\epsilon}_{AB} \hat{S}^B (\hat{D}^A f) + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \quad (7.68)$$

$$h_{(\text{spin})ur} = -\frac{\kappa p(E - pf)}{2r^2} \hat{\epsilon}_{AB} \hat{S}^B (\hat{D}^A f) + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \quad (7.69)$$

$$h_{(\text{spin})rr} = \kappa \frac{u}{r^3} p(E - pf) \hat{\epsilon}_{AB} \hat{S}^B (\hat{D}^A f) + O\left(\frac{u^2}{r^4}\right) \quad (7.70)$$

³ Es sei auf die sehr ähnliche, jedoch konfliktfreie Notation des Drehimpulstensors $S_{\alpha\beta}$, des Drehimpulsvektors S^α , die Darstellung des Drehimpulsvektors auf der Einheitszweispähre \hat{S}^A , dem Betrag des Viererdrehimpulsvektors \mathbf{S} , dem dreidimensionalen Drehimpulsvektor \vec{S} und dessen Betrag S , sowie der Metrik der Einheitszweispähre s_{AB} hingewiesen.

$$\begin{aligned}
h_{(\text{spin})uA} &= -\frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{1}{r} \hat{\epsilon}_{AB} \left(EpS^u (\hat{D}^B f) - E(E-pf) \hat{S}^B \right) \right. \\
&\quad + \frac{u}{r^2} \hat{\epsilon}_{AB} \left[\left(\left(Epf + 3 \frac{Ep(p-Ef)}{E-pf} \right) \hat{S}^B \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \left(EpS^r + \frac{3Ep^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} S^u \right) (\hat{D}^B f) \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{u}{r^2} p^2 \hat{\epsilon}_{BC} \hat{S}^C (\hat{D}^B f) (\hat{D}_A f) \right\} + O\left(\frac{u}{r^3}\right)
\end{aligned} \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned}
h_{(\text{spin})rA} &= -\frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{1}{r} \hat{\epsilon}_{AB} \left(p(E-pf) S^u (\hat{D}^B f) - (E-pf)^2 \hat{S}^B \right) \right. \\
&\quad + \frac{u}{r^2} \hat{\epsilon}_{AB} \left[(E-pf)^2 - m^2 + 2p^2(1-f^2) \right] \hat{S}^B \\
&\quad \quad \left. - \left(p(E-pf) S^r + \frac{3p^2(p-Ef)}{E-pf} S^u \right) (\hat{D}^B f) \right] \\
&\quad \quad \left. - \frac{u}{r^2} p^2 \hat{\epsilon}_{BC} \hat{S}^C (\hat{D}^B f) (\hat{D}_A f) \right\} + O\left(\frac{u}{r^3}\right)
\end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned}
h_{(\text{spin})AB} &= -\kappa \hat{\epsilon}_{(A|C} \left\{ p(E-pf) \hat{S}^C - p^2 S^u (\hat{D}^C f) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u}{r} \left[\left(p^2 f - \frac{3p^2(p-Ef)}{E-pf} \right) \hat{S}^C \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \left(p^2 S^r + \frac{3p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} S^u \right) (\hat{D}^C f) \right] \right\} (\hat{D}_{|B} f) + O\left(\frac{u}{r}\right)^2,
\end{aligned} \tag{7.73}$$

wobei $\kappa = \frac{4\Theta(u)m}{(E-pf)^3}$ und $\hat{\epsilon}_{AB}$ der vollständig antisymmetrische Tensor auf der Zweispähre,

mit $\hat{\epsilon}_{AB} = \sqrt{\det(s)} \varepsilon_{AB}$, ist.

Bis zur führenden Ordnung des Drehimpulsterms ergibt sich der gesamte Sörungsterm für ein auslaufendes Teilchen aus (3.22), (7.16) f.f. und (7.68) f.f. zu

$$\begin{aligned}
\gamma_{uu} &= \frac{2\Theta(u)}{r} \left[\frac{E^2 + p^2}{E-pf} + \frac{2mp^2 f}{r(E-pf)^3} \hat{\epsilon}_{AB} \hat{S}^B (\hat{D}^A f) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{u}{r} \right) \frac{E^2 p^2 f^2 + E^3 pf - E^2 p^2 - p^4}{(E-pf)^3} \right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right)
\end{aligned} \tag{7.74}$$

$$\gamma_{ur} = \frac{2\Theta(u)}{r} \left[E + \frac{p^2 - Epf}{E-pf} - \frac{u}{r} \left(\frac{Ep(p-Ef)}{(E-pf)^2} + \frac{p^2(p-Ef)^2}{(E-pf)^3} \right) \right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \tag{7.75}$$

$$\gamma_{rr} = \frac{4\Theta(u)}{r} \left[(E - pf) - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p(p - Ef)}{(E - pf)} \right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{uA} = 4\Theta(u) & \left\{ -\frac{Ep}{(E - pf)} (\hat{D}_A f) + \left(\frac{u}{r} \right) \frac{Ep^2(p - Ef)}{(E - pf)^3} (\hat{D}_A f) \right. \\ & - \left(\frac{u}{r} \right)^2 \frac{2Ep^3(p - Ef)^2 - m^2Ep^3(1 - f^2)}{2(E - pf)^5} (\hat{D}_A f) \\ & - \frac{mE}{2r(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\frac{pS^u}{E - pf} (\hat{D}^B f) - \hat{S}^B \right) \\ & - \left(\frac{u}{r^2} \right) \frac{mE}{2(E - pf)^3} \hat{\epsilon}_{AB} \left[\left(pf + \frac{3p(p - Ef)}{E - pf} \right) \hat{S}^B \right. \\ & \quad \left. - \left(pS^r + \frac{3p^2(p - Ef)}{(E - pf)^2} S^u \right) (\hat{D}^B f) \right] \\ & \left. + \left(\frac{u}{r^2} \right) \frac{mp^2}{2(E - pf)^3} \hat{\epsilon}_{BC} \hat{S}^C (\hat{D}^B f) (\hat{D}_A f) \right\} + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (7.77)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rA} = 4\Theta(u) & \left[-p(\hat{D}_A f) + \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p^2(p - Ef)}{(E - pf)^2} (\hat{D}_A f) \right. \\ & - \left(\frac{u}{r} \right)^2 \frac{2p^3(p - Ef)^2 - m^2p^3(1 - f^2)}{2(E - pf)^4} (\hat{D}_A f) \\ & - \frac{m}{2r(E - pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\frac{pS^u}{(E - pf)} (\hat{D}^B f) - \hat{S}^B \right) \\ & - \left(\frac{u}{r^2} \right) \frac{m}{2(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{AB} \left[\left(pf + \frac{3p(p - Ef)}{E - pf} \right) \hat{S}^B \right. \\ & \quad \left. - \left(pS^r + \frac{3p^2(p - Ef)}{(E - pf)^2} S^u \right) (\hat{D}^B f) \right] \\ & \left. + \left(\frac{u}{r^2} \right) \frac{mp^2}{2(E - pf)^3} \hat{\epsilon}_{BC} \hat{S}^C (\hat{D}^B f) (\hat{D}_A f) \right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{AB} = 4r\Theta(u) & \left\{ \left[\frac{p^2}{E-pf} - \left(\frac{u}{r}\right) \frac{p^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right] (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
& \left. + \frac{mp}{r(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{pS^u}{E-pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B} f) \right] \\
& + \frac{s_{AB}}{2} \left[\frac{m^2}{E-pf} - \left(\frac{u}{r}\right) \frac{m^2 p(p-Ef)}{(E-pf)^3} - \frac{2mp}{r(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \left. \right\} \\
& + O\left(\frac{u^2}{r}\right).
\end{aligned} \tag{7.79}$$

7.3 Riemanntensor

Aus den vorangegangenen Rechnungen lassen sich die relevanten Komponenten des linearisierten Riemannsensors in der Jacobigleichung (4.4) für die geodätischen Abweichungen bestimmen und der Fall ohne Berücksichtigung des Drehimpulses mit dem dreimpulsbehafteten Fall vergleichen.

In der geodätischen Abweichungsgleichung (4.4) treten in den gewählten Koordinaten drei nicht verschwindende Komponenten des Riemannsensors auf. Alle anderen Kombinationen der Indizes verschwinden aufgrund der Symmetrie des Riemannsensors (6.27) oder lassen sich durch eine dieser drei Komponenten darstellen. Die relevanten Komponenten ergeben sich aus $R_{\beta uu}{}^\alpha = \eta^{\alpha\gamma} R_{\beta uu\gamma}$ und lauten δR_{urur} , δR_{Auru} und R_{AuBu} . In (6.29) f.f. sind die Komponenten des linearisierten Riemannsensors durch die Störung ausgedrückt und können mit (7.74) f.f. explizit berechnet werden. Für ein auslaufendes Teilchen lauten die Komponenten

$$\delta R_{urur} = -\frac{2\delta(u)}{r^2} E - \frac{2\dot{\delta}(u)}{r} (E-pf) + O\left(\frac{u}{r^3}\right) \tag{7.80}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{Auru} = \delta(u) & \frac{1}{r} \left(\frac{2Ep}{E-pf} + \frac{m^2 p}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \\
& + \dot{\delta}(u) \left\{ 2p(\hat{D}_A f) - \frac{m}{r(E-pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}^B - \frac{pS^u}{(E-pf)} (\hat{D}^B f) \right) \right\} \\
& + O\left(\frac{u}{r^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.81}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{AuBu} = & 2\dot{\delta}(u) \left[-\frac{rp^2}{E-pf} (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
& - \frac{mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{pS^u}{E-pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B} f) \\
& \left. - \frac{s_{AB}}{2} \left[\frac{rm^2}{E-pf} - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \right] \quad (7.82) \\
& - 2\delta(u) \left[\left(\frac{Ep^2}{(E-pf)^2} + \frac{m^2 p^2}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
& \left. + \frac{2Ep}{E-pf} (\hat{D}_A \hat{D}_B f) - \frac{s_{AB}}{2} \left(E + \frac{p(p-3Ef)}{E-pf} + \frac{m^2 p(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) \right] \\
& + O\left(\frac{u}{r}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\dot{\delta}$ die Ableitung nach u bezeichnet. Ausführliche Rechnungen sind in Appendix A.2 zu finden.

Wird die Summe über alle ein- und auslaufenden Teilchen wieder explizit ausgeschrieben, fallen für obige Ausdrücke alle in Energie oder Impuls linearen Terme, aufgrund der Energie- und Impulserhaltung (2.6) weg. Des Weiteren werden zur besseren Übersicht in obigen Ausdrücken die Terme proportional zu $u\delta(u)$ fallen gelassen, da sie in den folgenden Rechnungen aufgrund der Integration über du verschwinden. Da sich ein- und auslaufende Teilchen lediglich durch ein Vorzeichen der Θ -Funktion und deren Ableitungen unterscheiden, wird die Funktion $\nu_i = \begin{cases} -1, & i \in \{1, \dots, k\} \\ 1, & i \in \{k+1, \dots, k+l\} \end{cases}$ eingeführt und die Summen über k einlaufende und l auslaufende Teilchen zusammengefasst. Die Komponenten des linearisierten Riemann tensors, welche zur geodätischen Abweichung gemäß (4.4) beitragen, lauten somit

$$\delta R_{urur} = \sum_i -\frac{2\nu_i \delta(u)}{r^2} E_i - \frac{2\nu_i \dot{\delta}(u)}{r} (E_i - p_i f_i) + O\left(\frac{u}{r^3}\right) = O\left(\frac{u}{r^3}\right) \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{Auru} = & \sum_i +\nu_i \delta(u) \frac{1}{r} \left(\frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) (\hat{D}_A f_i) \\
& - \nu_i \dot{\delta}(u) \frac{m_i}{r(E_i - p_i f_i)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}_i^B - \frac{p_i S_i^u}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^B f_i) \right) + O\left(\frac{u}{r^2}\right) \quad (7.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{AuBu} = \sum_i 2\nu_i \dot{\delta}(u) & \left[-\frac{rp_i^2}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}_A f_i) (\hat{D}_B f_i) \right. \\
& - \frac{m_i p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \hat{e}_{(A|C} \left(\hat{S}_i^C - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^C f_i) \right) (\hat{D}_{|B} f_i) \\
& \left. - \frac{s_{AB}}{2} \left[\frac{rm_i^2}{E_i - p_i f_i} - \frac{2m_i p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \hat{e}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right] \right] \quad (7.85) \\
& - 2\nu_i \delta(u) \left[\left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}_A f_i) (\hat{D}_B f_i) \right. \\
& \left. + \frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}_A \hat{D}_B f_i) - \frac{s_{AB}}{2} \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right] \\
& + O\left(\frac{u}{r}\right).
\end{aligned}$$

8 Memory-Effekt

Der sogenannte gravitative Memory-Effekt, hervorgerufen durch ein Ereignis S zur retardierten Zeit u_0 , lässt sich aus der geodätischen Abweichungsgleichung (4.4) bestimmen. Das Verhalten von Testmassen unter dem Einfluss von Gravitationsstrahlung wird durch die zeitliche Entwicklung der linearisierten geodätischen Abweichung beschrieben

$$\delta x^\alpha(u) = \int du \int du \eta^{\alpha\gamma} x^\beta \sum_i \delta R_{(i)\beta u u \gamma}, \quad (8.1)$$

wobei $\delta x^\alpha(u)$ die Änderung der Komponenten des Verbindungsvektors x^β zweier Testmassen beschreibt. $\delta x^\alpha(u)$ wird als Memory-Effekt bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $u_0 = 0$ gewählt und der Koordinatenursprung durch das Ereignis S festgelegt. Da von einer initial ruhenden Testmassenverteilung ausgegangen wird, nimmt der Vektor (x^β) auf der rechten Seite von (8.1) in kartesischen Koordinaten die Form $(x^\beta) = (0, x^1, x^2, x^3)$ an. Dieser lässt sich wie folgt in Bondi-Koordinaten (u, r, x^A) ausdrücken

$$x^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta (\vec{x} \vec{r}_r), \quad (8.2)$$

wobei \vec{r}_r der Ortsvektor der Testmasse ist, von welcher der Verbindungsvektor \vec{x} ausgeht. Nach (8.2) lauten die Komponenten explizit

$$x^u = -|\vec{x}| i(\hat{z}) \quad (8.3)$$

$$x^r = |\vec{x}|i(\hat{z}) \quad (8.4)$$

$$x^A = \frac{1}{r}|\vec{x}|\hat{D}^A i(\hat{z}), \quad (8.5)$$

mit $i(\hat{z}) = \hat{x}\hat{r}_r$. Die geodätische Abweichungsgleichung wird bis einschließlich der nächstführenden Ordnung in r^{-1} der jeweiligen Komponente betrachtet. Das bedeutet die Komponenten $\delta x^r(u)$ und $\delta x^u(u)$, aus (8.1), müssen bis zur Ordnung $O(r^{-2})$ entwickelt werden. Die Komponenten $\delta x^A(u)$ müssen bis zur Ordnung $O(r^{-3})$ entwickelt werden, da die Komponenten x^A des Verbindungsvektors der Testmassen, in den gewählten Koordinaten, bereits von der Ordnung $O(r^{-1})$ sind, vgl. (8.3) f.f.. Die Abweichung der jeweiligen Komponenten des Verbindungsvektors der Testmassen bestimmt sich gemäß (8.1) unter Verwendung von (7.83) f.f. zu

$$\delta x^u(u) = -\delta x^r(u) \quad (8.6)$$

$$\delta x^r(u) = \int \int (du)^2 \eta^{rr} \sum_i \left(\delta R_{(i)r u u r} x^r + \delta R_{(i)A u u r} x^A \right) \quad (8.7)$$

$$\delta x^A(u) = \int \int (du)^2 \frac{s^{AB}}{r^2} \sum_i \left(\delta R_{(i)B u u r} x^r + \delta R_{(i)B u u C} x^C \right). \quad (8.8)$$

8.1 Memory-Tensor

Die Änderung der geodätischen Abweichung, welche durch einen Ausbruch von Gravitationsstrahlung zur Zeit $u_0 = 0$ verursacht wird, lässt sich durch den Memory-Tensor $\mathfrak{D}^\alpha_\beta$ beschreiben, welcher definiert ist als

$$\delta x^\alpha = \mathfrak{D}^\alpha_\beta x^\beta. \quad (8.9)$$

Aus (8.1) ist ersichtlich, dass dies dem zweifach nach du integrierten linearisierten Riemanntensor entspricht. Die nicht verschwindenden Komponenten des Memory-Tensors werden aus (8.6) f.f. bestimmt. Da nur Beiträge des Memory-Effekts einschließlich der nächstführenden Ordnung betrachtet werden, müssen die Komponenten \mathfrak{D}^A_B bis zur zweiten Ordnung in r^{-1} , die übrigen Komponenten \mathfrak{D}^u_A , \mathfrak{D}^r_A und \mathfrak{D}^A_r jedoch nur bis zur ersten Ordnung in r^{-1} entwickelt werden, da letztere bereits ein subdominanter Effekt sind. Die Integrale in (8.6) f.f. reduzieren sich, für die relevanten Ordnungen, auf die folgenden Typen

$$\int \int (du)^2 \nu_i \delta(u) = \nu_i u \Theta(u) \quad (8.10)$$

$$\int \int (du)^2 \nu_i \dot{\delta}(u) = \nu_i \Theta(u). \quad (8.11)$$

Die Integrationskonstanten werden stets null gewählt.

Zunächst sollen die Komponenten \mathfrak{D}^A_B näher betrachtet werden. Nach Ausführen der Integrale nach dem Muster von (8.10) f.f. für (7.85), lassen sich die Komponenten des Memory-Tensors in folgende Anteile zerlegen

$$\mathfrak{D}^A_B = \mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A_B + \mathfrak{D}_{(\text{vel.})}^A_B + \mathfrak{D}_{(\text{spin})_{TF}}^A_B + \mathfrak{D}_{(\text{spin})_T}^A_B. \quad (8.12)$$

$\mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A_B$ ist der führende Term in r^{-1} und ergibt sich aus dem führenden Term der Störung (7.39) bzw. (7.79). Er ist für den Drehimpulsbehafteten und drehimpulslosen Fall identisch.

$\mathfrak{D}_{(\text{vel.})}^A_B$ ist von Ordnung $O(r^{-2})$ und linear in u . Er trägt keinen Beitrag des Drehimpulses und ist somit ebenfalls identisch für Quellen mit und ohne Berücksichtigung des Drehimpulses. Er hat seinen Ursprung in den Termen zu nächstführender Ordnung $O(1)$ in r^{-1} der Störung (7.39) und den führenden Termen in r^{-1} in (7.34) f.f..

$\mathfrak{D}_{(\text{spin})}^A_B$ ist ebenfalls von der Ordnung $O(r^{-2})$, jedoch konstant in u . Er entspringt den Termen in (7.79), welche sich aus dem Drehimpulsbeitrag der Quellen ableiten. Der Drehimpulsbeitrag $\mathfrak{D}_{(\text{spin})}^A_B$ kann in einen spurfreien und einen spurbehafteten Teil zerlegt werden, während die anderen Beiträge $\mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A_B$ und $\mathfrak{D}_{(\text{vel.})}^A_B$ spurfrei sind.

Alle weiteren Komponenten sind bereits in einen Anteil, hervorgerufen durch den Drehimpuls und einen Anteil, hervorgerufen durch die nächstführende Ordnung des drehimpulslosen Anteils der Störung (7.74) f.f. zerlegt. Alle Komponenten des Memory-Tensors, außer $\mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A_B$, lassen sich durch \mathfrak{D}^r_A darstellen, weshalb sie nicht mehr explizit aufgeführt werden. Ausführliche Berechnung der Anteile ist in Appendix B zu finden.

Die Komponenten des Memory-Tensors lauten

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^A_B = \sum_i \frac{2\nu_i \Theta(u) p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} & \left\{ \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\ & + \frac{u}{r} \left[2 \frac{E_i}{p_i} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{E_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right] \right\} \quad (8.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{r} \frac{m_i}{E_i - p_i f_i} \left[- \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right. \\ & \left. + \left(s^{AC} \hat{\epsilon}_{C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) \right] \left. \right\} \\ \mathfrak{D}^r_A = \sum_i \nu_i \Theta(u) & \left\{ \frac{m_i}{r(E_i - p_i f_i)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}_i^B - \frac{p_i S_i^u}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^B f_i) \right) \right. \\ & \left. - \frac{u}{r} \left(\frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) (\hat{D}_A f_i) \right\} \quad (8.14) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{D}^u_A = -\mathfrak{D}^r_A \quad (8.15)$$

$$\mathfrak{D}^A_r = \frac{s^{AB}}{r^2} \mathfrak{D}^r_B. \quad (8.16)$$

Alle Beiträge von höherer als nächstführender Ordnung in r^{-1} wurden nicht explizit notiert, da sie im Rahmen dieser Näherung nicht beachtet werden.

8.2 Manifestation des gravitativen Memory-Effekts

Wie bereits zuvor diskutiert, gibt es verschiedene Beiträge des Memory Tensors (8.9), welche sich auf unterschiedliche Weise in der Verschiebung von Testmassen nach einem Gravitationsstrahlungspuls äußern. In der Literatur gibt es viele verschiedene Bezeichnungen diverser Beiträge zum Memory-Effekt, teils nach ihren Entdeckern, teils nach ihrer physikalischen Manifestation und teils nach den Ordnungen der jeweiligen Approximation, zu welchen sie beitragen, benannt. In dieser Arbeit wird zwischen dem gewöhnlichen Memory-Effekt, dem Geschwindigkeits-Memory-Effekt und dem Spin-Memory-Effekt unterschieden.

Der gewöhnliche Memory-Effekt, entspricht dem Term führender Ordnung in r^{-1} . Er ist der am längsten bekannte Beitrag und von Braginski und Grishchuk als „Memory-Effekt“ bezeichnet. Eine explizite Analyse, welche sich mit den in Kapitel 9.1 angestellten Berechnungen deckt, ist zum Beispiel in [5] zu finden.

Unter Geschwindigkeits-Memory-Effekt wird der Beitrag zur nächstführenden Ordnung in r^{-1} verstanden, welcher eine lineare Abhängigkeit in der retardierten Zeitkomponente u aufweist und somit, je nach initialer Konfiguration eine stetige Entfernung oder Annäherung der Testmassen relativ zueinander beschreibt. Zuerst wurde dieser Effekt von Bondi und Pirani 1989 [9] beschrieben, nachdem er 1974 von Zel'dovich und Polnarev [10] noch ausgeschlossen wurde.

Der Spin-Memory-Effekt beschreibt die Verschiebung von Testmassen aufgrund der Eigenrotation der Quellen. Er trägt zur Ordnung $O(r^{-2})$ bei und bewirkt, ebenso wie der gewöhnliche Memory-Effekt, einen Sprung in der räumlichen Verteilung der Testmassen. Werden Terme von noch höherer Ordnung betrachtet, treten auch Beiträge zum Geschwindigkeits-Memory-Effekt, hervorgerufen durch die Drehimpulse der Quellen, auf. Der Spin-Memory-Effekt beschreibt also keinen grundsätzlich neuen Effekt, sondern nur die Beiträge, welche, aufgrund der Drehimpulse der Quellteilchen, zusätzlich in den bereits bekannten Memory-Effekten auftreten.

Das sprunghafte Verhalten rührt von der Betrachtung der Quellen als Punktteilchen. Wird statt einem Gravitationsstrahlungspuls eine zeitlich ausgedehnte Welle betrachtet, so treten keine Unstetigkeiten der Weltlinien der Testmassen auf. Ein direkter Vergleich zwischen zeitlich ausgedehnten Gravitationswellen und Gravitationsstrahlungspulsen mit dem Wellenprofil einer δ -Funktion ist in [11] und [12] für den Geschwindigkeits-Memory-Effekt zu finden. Ebenso werden für den gewöhnlichen Memory-Effekt keine Diskontinui-

täten der Weltlinien der Testmassen für zeitlich ausgedehnte Gravitationswellen erwartet, z.B. in [17].

9 Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wird ein Beispiel gegeben, wie sich der Memory-Tensor für ein konkretes Streueignis S bestimmen lässt. Zunächst ist es sinnvoll den Memory-Tensor in eine leicht veränderte Form zu überführen, indem die Geschwindigkeit der Teilchen $|\vec{v}| = \beta$ explizit in die Gleichung eingesetzt werden.^{4,5}

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^A{}_B &= \sum_i \frac{2\nu_i \Theta(u)}{r} \frac{\beta_i^2 E_i}{1 - \beta_i f_i} \left\{ \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\
&\quad + \frac{u}{r} \left[\frac{2}{\beta_i} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{1 - \beta_i f_i} + \frac{1}{\gamma_i^2 (1 - \beta_i f_i)^2} \right) \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{1}{\gamma_i p_i (1 - \beta_i f_i)} \left[- \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \left(\hat{S}_i^D - \frac{\beta_i S_i^u}{1 - \beta_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) \right] \right\} \\
\mathfrak{D}^r{}_A &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \left\{ \frac{1}{r \gamma_i (1 - \beta_i f_i)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}_i^B - \frac{\beta_i S_i^u}{(1 - \beta_i f_i)} (\hat{D}^B f_i) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u}{r} \left(\frac{2\beta_i E_i}{1 - \beta_i f_i} + \frac{\beta_i E_i (1 - \beta_i^2)}{(1 - \beta_i f_i)^2} \right) (\hat{D}_A f_i) \right\} \tag{9.2}
\end{aligned}$$

Im Folgenden wird der Koordinatenursprung durch das Ereignis S festgelegt.⁶ Ein Beobachter, welcher den Memory-Effekt auswertet, befindet sich unter dem Polarwinkel θ_r und dem Azimutwinkel φ_r im Abstand r_r zum Ereignis S . Das i -te in S wechselwirkende Teilchen besitzt die Gesamtenergie E_i und Dreierimpuls $\vec{p}_i = p_i \hat{r}_i$, mit dem Betrag

⁴ Aus $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$ folgt mit $\gamma = \frac{E}{m}$ und $E^2 - p^2 = m^2$ für die Geschwindigkeit $v = \beta = \frac{p}{E}$. Wobei E die Gesamtenergie, p der Betrag des räumlichen Impulses und m die Ruhemasse des Teilchens ist und nach wie vor in geometrisierten Einheiten gearbeitet wird.

⁵ Es wird nur mit dem Betrag der Geschwindigkeit gearbeitet, da die Richtung in der Funktion f_i für jedes Teilchen kodiert ist.

⁶ vgl. Kapitel 6

des Impulses p_i , dem Polarwinkel θ_i und dem Azimutwinkel φ_i . Als nächstes werden die Ableitungen der Funktion $f_i := \hat{r}_r \hat{r}_i$ bestimmt. Mit

$$s_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

den Darstellungen der Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

und deren Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= \sin \theta \hat{\varphi} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= \cos \theta \hat{\varphi} & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta} \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{D}_\theta f_i &= \hat{D}^\theta f_i = \hat{\theta}_r \hat{r}_i + \hat{r}_r \hat{\theta}_i \\ \hat{D}_\varphi f_i &= \sin(\theta_r) \hat{\varphi}_r \hat{r}_i + \sin(\theta_i) \hat{r}_r \hat{\varphi}_i \\ \hat{D}^\varphi f_i &= \sin^{-1}(\theta_i) \hat{\varphi}_r \hat{r}_i + \sin^{-1}(\theta_r) \hat{r}_r \hat{\varphi}_i \\ \hat{D}^\theta \hat{D}_\theta f_i &= -2\hat{r}_r \hat{r}_i + 2\hat{\theta}_r \hat{\theta}_i \\ \hat{D}^\varphi \hat{D}_\varphi f_i &= 2\hat{\varphi}_r \hat{\varphi}_i - \left(\frac{\sin(\theta_r)}{\sin(\theta_i)} + \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} \right) \hat{r}_r \hat{r}_i - \frac{\cos(\theta_r)}{\sin(\theta_i)} \hat{\theta}_r \hat{r}_i - \frac{\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} \hat{r}_r \hat{\theta}_i \\ \hat{D}^\theta \hat{D}_\varphi f_i &= \cos(\theta_i) \hat{r}_r \hat{\varphi}_i + \sin(\theta_i) \hat{\theta}_r \hat{\varphi}_i + \sin(\theta_r) \hat{\varphi}_r \hat{\theta}_i + \cos(\theta_r) \hat{\varphi}_r \hat{r}_i \\ \hat{D}^\varphi \hat{D}_\theta f_i &= \sin^{-1}(\theta_i) \hat{\varphi}_r \hat{\theta}_i + \sin^{-1}(\theta_r) \hat{\theta}_r \hat{\varphi}_i \\ &\quad + \frac{\cos(\theta_r)}{\sin(\theta_r) \sin(\theta_i)} \hat{\varphi}_r \hat{r}_i + \frac{\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_r) \sin(\theta_i)} \hat{r}_r \hat{\varphi}_i. \end{aligned} \quad (9.6)$$

9.1 Teilchenzerfall

Es soll der Fall betrachtet werden, in welchem ein ruhendes Mutterteilchen in zwei Tochterteilchen zerfällt. Für den führenden Term in r^{-1} , in dieser Arbeit mit $\mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A_B$ bezeichnet, ist dieser Fall von Tolish et al. in [5] analysiert. Zur einfachen Vergleichbarkeit wird der Notation dieses Papers gefolgt. Das Koordinatensystem wird so ausgerichtet,

dass ein Teilchen sich mit der Geschwindigkeit β , Energie E und Ruhemasse m in positiver z -Richtung bewegt, das andere Teilchen mit Geschwindigkeit $\tilde{\beta}$, Energie \tilde{E} und Ruhemasse \tilde{m} in negativer z -Richtung. Das Mutterteilchen hat die Masse M . Die Funktionen f_i , nehmen in diesem Fall für das Mutterteilchen die Form $f_M = 0$, sowie für das Tochterteilchen, welches sich in positiver z -Richtung bewegt, $f = \cos(\theta_r)$ und das Tochterteilchen, welches sich in negativer z -Richtung bewegt, $\tilde{f} = -\cos(\theta_r)$ an. Die nicht verschwindenden Ableitungen der Funktionen f und \tilde{f} werden gemäß (9.6) und unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie des betrachteten Problems bestimmt und lauten

$$\begin{aligned} \hat{D}_\theta f &= \hat{D}^\theta f = -\sin(\theta_r) & \hat{D}_\theta \tilde{f} &= \hat{D}^\theta \tilde{f} = \sin(\theta_r) \\ \hat{D}^\theta \hat{D}_\theta f &= -2 \cos(\theta_r) & \hat{D}^\theta \hat{D}_\theta \tilde{f} &= 2 \cos(\theta_r). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Abweichend zur Analyse von Tolish et al., werden die Tochterteilchen mit einem Drehimpuls versehen, das Mutterteilchen bleibt jedoch rotationslos. Aus der Forderung nach einem rotationssymmetrischen Problem, werden die Dreierdrehimpulsvektoren der Tochterteilchen parallel zu ihren Impulsen gewählt. Da $f(\hat{z}) = g(\hat{z})$ gilt, vereinfacht dies die Ausdrücke der Drehimpulsvektoren in Bondi-Koordinaten (7.59) f.f., wie folgt

$$\begin{aligned} S^u &= \gamma \mathbf{S}(\beta - \cos(\theta_r)) & \tilde{S}^u &= \tilde{\gamma} \mathbf{S}(\tilde{\beta} + \cos(\theta_r)) \\ S^r &= \gamma \mathbf{S} \cos(\theta_r) & \tilde{S}^r &= -\tilde{\gamma} \mathbf{S} \cos(\theta_r) \\ S^\theta &= -\gamma \mathbf{S} \sin(\theta_r) & \tilde{S}^\theta &= \tilde{\gamma} \mathbf{S} \sin(\theta_r). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses (2.26) zusammen mit (7.51) folgt, dass die Beträge der Viererdrehimpulsvektoren \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{S}}$ gleich sein müssen, was in obigen Ausdrücken bereits ausgenutzt wurde.

Die Komponenten des Memory-Tensor (9.1) f.f. werden so weit wie möglich und sinnvoll gemäß den obigen Ergebnissen vereinfacht.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^A_B = \Theta(u) & \left\{ \left\{ \frac{-\beta^2 E \sin^2 \theta}{r(1-\beta \cos \theta)(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))} \right. \right. \\
& - \frac{u}{r^2} \left[\beta^2 E \sin^2 \theta \left(\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^2} + \frac{\frac{E}{M}(1-\frac{E}{M})}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^2} + \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \theta)^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\frac{E}{M}(1-\frac{E}{M})^2 - \beta^2(\frac{E}{M})^2(1-\frac{E}{M})}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^3} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{4\beta^2 E \cos^2 \theta}{(1-\beta \cos \theta)(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))} \right] \right\} (\delta_\theta^A \delta_B^\theta - \delta_\varphi^A \delta_B^\varphi) \quad (9.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathbf{S}\beta}{r^2} \left[\sin \theta \left(\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^2} + \frac{\frac{E}{M}(1-\frac{E}{M})}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \beta^2 \left(\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} - \frac{(\frac{E}{M})^2(1-\frac{E}{M})^2}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^3} \right) \right. \\
& \quad \left. - \beta \cos \theta \left(\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} - \frac{(\frac{E}{M})^2(1-\frac{E}{M})}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^3} \right) \right] (\delta_\varphi^A \delta_B^\theta + \delta_\theta^A \delta_B^\varphi \sin^2 \theta) \Big\} \\
\mathfrak{D}^r_A = \Theta(u) & \left\{ \frac{\mathbf{S} \sin^2 \theta}{r} \left[- \frac{\beta \cos \theta}{(1-\beta \cos \theta)(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))} + \frac{\beta(\beta - \cos \theta)}{(1-\beta \cos \theta)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\beta \frac{E}{M}(1-\frac{E}{M})(\frac{\beta E}{M-E} + \cos \theta)}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^2} \right] \delta_A^\varphi \right. \\
& \quad \left. - \frac{u}{r} \beta E \sin \theta \left[\frac{2\beta \cos \theta}{(1-\beta \cos \theta)(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))} + \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \theta)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(1-\frac{E}{M})^2(1-\frac{\beta^2 E^2}{(M-E)^2})}{(1-\frac{E}{M}(1-\beta \cos \theta))^2} \right] \delta_A^\theta \right\} \quad (9.10)
\end{aligned}$$

9.2 Größenabschätzung

Um herauszufinden von welcher Größenordnung der Memory-Effekt und insbesondere der durch den Drehimpuls der Quellen hervorgerufene Beitrag ist, werden in (9.9)

f.f. typische Werte für die Massen, Geschwindigkeiten und Drehimpulse, von astronomischen Objekten eingesetzt. Anschließend wird das Ergebnis mit den Daten des Ereignisses GW150914 verglichen, welches die erste direkt nachgewiesene Gravitationswelle war [13]. Der für astronomische Ereignisse ungewöhnliche bzw. unmögliche Fall, des im Kapitel 9.1 beschriebenen Teilchenzerfalls, ist durch Vertauschen der ein- und auslaufenden Teilchen in einen Prozess, der das Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher beschreibt, umwandelbar. Aus erster Betrachtung von (9.9) f.f. ist klar, dass für kleine Geschwindigkeiten $\beta \ll 1$ ein maximaler Effekt zu erwarten ist, wenn sich der Beobachter auf der äquatorial Ebene befindet. Damit wird der Memory-Tensor zu

$$\mathfrak{D}^A_B = \Theta(u) \left\{ \frac{\beta^2 E}{r} \left[- \left(1 - \frac{E}{M}\right)^{-1} - \frac{u}{r} \left[2 \left(1 - \frac{E}{M}\right)^{-1} - \beta^2 \left(1 + \frac{\left(\frac{E}{M}\right)^2}{\left(1 - \frac{E}{M}\right)^2} \right) \right] \right] \left(\delta_\theta^A \delta_B^\theta - \delta_\varphi^A \delta_B^\varphi \right) \right. \quad (9.11)$$

$$\left. + \frac{\beta \mathbf{S}}{r^2} \left[\left(1 - \frac{E}{M}\right)^{-1} + \beta^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{E}{M}\right)^2}{1 - \frac{E}{M}}\right) \right] \left(\delta_\theta^A \delta_B^\varphi - \delta_\varphi^A \delta_B^\theta \right) \right\}$$

$$\mathfrak{D}^r_A = \Theta(u) \left\{ \frac{\beta^2 \mathbf{S}}{r} \left[1 - \frac{\left(\frac{E}{M}\right)^2}{\left(1 - \frac{E}{M}\right)^2} \right] \delta_A^\varphi + \frac{u}{r} \beta^3 E \left[1 - \frac{\left(\frac{E}{M}\right)^2}{\left(1 - \frac{E}{M}\right)^2} \right] \delta_A^\theta \right\}. \quad (9.12)$$

Wird eines der Tochterteilchen als maximal rotierendes Kerr-Schwarzes Loch angenommen, gilt $\mathbf{S} = m^2$ für $m < \tilde{m}$. Um den Drehimpulsbeitrag zu maximieren, wird $m = \tilde{m}$ angenommen, woraus sofort $\frac{E}{M} = \frac{1}{2}$ folgt. Die Geschwindigkeit β liegt typischer Weise im einstelligen Prozentbereich der Lichtgeschwindigkeit und wird über die Frequenz der Gravitationswelle ω und den Schwarzschild-Radius r_S der verschmelzenden Schwarzen Löcher bestimmt, siehe z.B. [12].

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega r_S}{2c} = \frac{G_N \omega M}{c^3} \ll 1 \quad (9.13)$$

Dies rechtfertigt eine Unterdrückung von Termen höherer Ordnung in β für die jeweiligen Beiträge. Die führenden Beiträge in β des gewöhnlichen, Geschwindigkeits- und Spin-Memory-Effekts lauten unter diesen Annahmen

$$\mathfrak{D}^A_B = \Theta(u) \left\{ - \frac{\beta^2 M}{r} \left(1 + 2 \frac{u}{r}\right) \left(\delta_\theta^A \delta_B^\theta - \delta_\varphi^A \delta_B^\varphi \right) + \frac{\beta M^2}{2r^2} \left(\delta_\theta^A \delta_B^\varphi - \delta_\varphi^A \delta_B^\theta \right) \right\} \quad (9.14)$$

$$\mathfrak{D}^r_A = 0 \quad (9.15)$$

Um experimentelle Daten in obige Gleichungen einsetzen zu können, wird von geometrisierten Einheiten wieder in das SI-Einheitensystem übergegangen, indem die Gravitationskonstante $G_N = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ und die Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wieder

explizit in den Gleichungen aufgeführt werden.

$$\mathfrak{D}^A_B = \Theta(u) \left\{ -\frac{G_N}{c^2} \frac{\beta^2 M}{r} \left(1 + 2\frac{u}{r}\right) \left(\delta_\theta^A \delta_B^\theta - \delta_\varphi^A \delta_B^\varphi\right) + \left(\frac{G_N}{c^2}\right)^2 \frac{M^2}{2r^2} \left(\delta_\theta^A \delta_B^\varphi - \delta_\varphi^A \delta_B^\theta\right) \right\} \quad (9.16)$$

In (9.16) ist zu sehen, dass für die Komponente \mathfrak{D}^A_B des Memory-Tensors, der gewöhnliche und der Geschwindigkeits-Memory-Effekt, bis auf einen Faktor $2\frac{u}{r}$, von gleicher Stärke sind. Werden alle Konstanten explizit eingesetzt, die Masse M als Vielfaches der Sonnenmasse $M = \tilde{M} M_\odot = \tilde{M} 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$ und der Abstand r in Lichtjahren $r = \tilde{r} 9,5 \cdot 10^{15} \text{m}$ angegeben, sowie $\beta = 10^{-2}$ gesetzt, so ist der gewöhnliche Memory-Effekt von der Größenordnung $7,8 \cdot 10^{-18} \frac{\tilde{M}}{\tilde{r}}$. Zum Zeitpunkt der Verschiebung der Testmassen aufgrund des gewöhnlichen Memory-Effekt $u_0 = 0$, hat der Geschwindigkeits-Memory-Effekt keinen Beitrag, da $u_0 = 0 = t_0 c - r_0$ gilt. Damit der Geschwindigkeits-Memory-Effekt die gleiche Größenordnung wie der gewöhnliche Memory-Effekt hat, muss also entsprechend Zeit vergehen. Pro einem Lichtjahr räumlicher Entfernung einer Beobachterin zum Ereignis S muss ein halbes Jahr vergehen, damit zum Zeitpunkt $t_0 + t$ mit $t = \frac{r_0}{c} = 1 \text{a}$ die Wirkung auf Testmassen durch den Geschwindigkeits-Memory-Effekt gleich der des gewöhnlichen Memory-Effekts ist. Für das Ereignis GW150914 entspräche dies 0,7 Milliardenjahre. Der Spin-Memory-Effekt skaliert mit der Masse gegenüber den anderen Beiträgen, welche mit β skalieren, er ist für $\beta = 10^{-2}$ von der Größenordnung $3,0 \cdot 10^{-29} \frac{M^2}{\tilde{r}^2}$. Für das Ereignis GW150914 mit $M \approx 70 M_\odot$, $\beta \approx 2,6 \cdot 10^{-2}$ und $\tilde{r} \approx 13 \cdot 10^9$, betragen die relativen Längenänderungen der Interferometerarme während der Oszillationsphase, welche nicht mit dem Memory-Effekt zu verwechseln ist, etwa 10^{-21} [13]. Der gewöhnliche Memory-Effekt für dieses Ereignis ist von der Größenordnung 10^{-24} und der Spin-Memory-Effekt von 10^{-43} .

9.3 Ausblick

Um die Frage zu klären, ob in naher Zukunft mit einem Nachweis des Spin-Memory-Effekts zu rechnen ist, werden folgende Abschätzungen angestellt.

Wird für die Masse eines Schwarzen Lochs die Obergrenze von $10^{10} M_\odot$, wie sie in [14] vorgeschlagen wird, angesetzt, so wäre für Ereignisse in einem Abstand von 10^6ly , der Spin-Memory-Effekt innerhalb der aktuellen Nachweisgrenzen von 10^{-22} . Das massereichste bekannte Objekt innerhalb dieses Radius ist das zentrale supermassive Schwarze Loch der Andromeda Galaxie mit $10^8 M_\odot$ und somit zwei Größenordnungen unter der aktuellen Nachweisgrenze. Das ist jedoch nicht das Hauptproblem, sondern es fehlt ein Objekt von gleicher Masse, welches unmittelbar vor einer Verschmelzung steht.

Weitere Kandidaten wie die Galaxie NGC7674 mit zwei, sich relativ nah umkreisenden, supermassiven Schwarzen Löchern weisen, mit einem Abstand von 10^8 Lichtjahren und

einer Gesamtmasse von 10^7 Sonnenmassen, deutlich zu geringe zu erwartende Effekte auf. Des Weiteren wird auch für dieses System keine baldige Verschmelzung der Schwarzen Löcher erwartet. [15]

Die einzige Möglichkeit besteht demnach darin, die Empfindlichkeit der Detektoren deutlich zu steigern. Dies könnte mit dem in Planung befindlichen weltraumbasierten Detektor LISA möglich sein, da dieser Detektor in der aktuellen Planung 2,5Gm lange Interferenzstrecken besitzen soll. Gegenüber den 4km langen Interferenzstrecken des LIGO Detektors wäre dieser theoretisch 10^5 Größenordnungen empfindlicher. Eine derart exakte Positionierung der Testmassen, also der Satelliten, dürfte jedoch deutlich schwerer zu erreichen sein, als im Fall erdbasierter Messgeräte. Ein prinzipieller Vorteil weltraumbasierter Gravitationsdetektoren ist, dass die Testmassen wirklich frei fallend sind. Erdbasierte Detektoren werden durch die Kräfte der Festkörper auf welchen sie stehen, also dem Gestein des Erdbodens, stets in ihre Ruhelage gedrückt, dies ist zur Detektion von Oszillationen zwar durch extrem flexible Aufhängung der Testmassen zu minimieren, eine permanente Verschiebung ist jedoch unmöglich zu erreichen. In dieser Arbeit wurden die Gravitationswellen als instantane Pulse behandelt. Arbeiten unter Verwendung eines anderen Näherungsverfahrens, nämlich der Post-Newtonischen Näherung, weisen darauf hin, dass Memory-Effekte sich über den gesamten Zeitraum der Gravitationswelle aufbauen [17]. Es wird davon ausgegangen, dass Satelliten, untereinander gänzlich frei von Atomarenbindungen, in der Lage sind sich langsam aufbauende Memory-Effekte zu messen.

A Spezielle Komponenten des linearisierten Riemannstensors

Im Folgenden werden ausführliche Berechnungen der Komponenten des linearisierten Riemannstensors in Bondi-Koordinaten gegeben. Es werden nur die zur Lösung von (4.4) benötigten Komponenten betrachtet.

A.1 Allgemeine Berechnung des linearisierten Riemannstensors

Die Berechnung der Komponenten des linearisierten Riemannstensors, in Abhängigkeit der Störung $\gamma_{\alpha\beta}$, lässt sich aus der Darstellung (6.26) des linearisierten Riemannstensors durch die Christoffelsymbole gewinnen. Gemäß Kapitel 6.3 werden die Koordinaten u und r mit kleinen römischen Buchstaben bezeichnet, die verbleibenden Winkelkoordinaten mit großen römischen Buchstaben. Griechische Buchstaben laufen stets über alle vier Koordinaten. Aus dem allgemeinen Ausdruck

$$\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = -\partial_\alpha \delta \Gamma_{\beta\gamma}^\delta + \partial_\beta \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon \delta \Gamma_{\beta\varepsilon}^\delta - \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\delta \delta \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon - \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon \delta \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\delta + \Gamma_{\beta\varepsilon}^\delta \delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon, \quad (\text{A.1})$$

ergeben sich die Komponenten, für die im Kapitel 6 gewählten Koordinaten, wie folgt, wobei die Rechnung nur für die Komponenten, die für das vorliegende Problem relevant sind, gezeigt wird.

$$\begin{aligned} \delta R_{abcd} &= \eta_{de} \delta R_{abc}{}^e = \eta_{de} \left[-\partial_a \delta \Gamma_{bc}^e + \partial_b \delta \Gamma_{ac}^e + \underbrace{\Gamma_{ac}^\varepsilon}_{=0} \delta \Gamma_{b\varepsilon}^e - \underbrace{\Gamma_{a\varepsilon}^e}_{=0} \delta \Gamma_{bc}^\varepsilon \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\Gamma_{bc}^\varepsilon}_{=0} \delta \Gamma_{a\varepsilon}^e + \underbrace{\Gamma_{b\varepsilon}^e}_{=0} \delta \Gamma_{ac}^\varepsilon \right] \quad (\text{A.2}) \\ &= \frac{1}{2} \eta_{de} \eta^{ef} \left[-\partial_a (\partial_b \gamma_{cf} + \partial_c \gamma_{bf} - \partial_f \gamma_{bc}) + \partial_b (\partial_a \gamma_{cf} + \partial_c \gamma_{af} - \partial_f \gamma_{ac}) \right] \\ &= \partial_c \partial_{[b} \gamma_{a]d} + \partial_d \partial_{[a} \gamma_{b]c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{Abcd} &= \eta_{ed} \delta R_{Abc}{}^e = \eta_{ed} \left[-\hat{D}_A \delta \Gamma_{bc}^e + \partial_b \delta \Gamma_{Ac}^e + \underbrace{\Gamma_{Ac}^f}_{=0} \delta \Gamma_{bf}^e + \underbrace{\Gamma_{Ac}^F}_{=\frac{1}{r} \delta_A^F(\partial_c r)} \delta \Gamma_{bF}^e \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\Gamma_{Af}^e}_{=0} \delta \Gamma_{bc}^f - \underbrace{\Gamma_{AF}^e}_{=-r s_{AF}(\partial^e r)} \delta \Gamma_{bc}^F - \underbrace{\Gamma_{bc}^\varepsilon}_{=0} \delta \Gamma_{A\varepsilon}^e + \underbrace{\Gamma_{b\varepsilon}^e}_{=0} \delta \Gamma_{Ac}^\varepsilon \right] \\
&= \frac{1}{2} \eta_{ed} \eta^{ef} \left[-\hat{D}_A (\partial_b \gamma_{cf} + \partial_c \gamma_{bf} - \partial_f \gamma_{bc}) \right. \\
&\quad + \partial_b (\hat{D}_A \gamma_{cf} + \partial_c \gamma_{Af} - \partial_f \gamma_{Ac} - \frac{2}{r} \gamma_{Af}(\partial_c r)) \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \delta_A^G(\partial_c r) (\partial_b \gamma_{fG} + \hat{D}_G \gamma_{bf} - \partial_f \gamma_{bG} - \frac{2}{r} \gamma_{fG}(\partial_b r)) \right] \tag{A.3} \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta_{ed} r s_{AF}(\partial^e r) \eta^{FG} (\partial_b \gamma_{cG} + \partial_c \gamma_{bG} - \hat{D}_G \gamma_{bc}) \\
&= \partial_b \partial_{[c} \gamma_{d]A} + \hat{D}_A \partial_{[d} \gamma_{c]b} - \frac{1}{r} \partial_b \gamma_{Ad}(\partial_c r) + \frac{1}{r^2} \gamma_{Ad}(\partial_b r)(\partial_c r) \\
&\quad + \frac{1}{2r} (\partial_c r) (\partial_b \gamma_{Ad} + \hat{D}_A \gamma_{bd} - \partial_d \gamma_{Ab} - \frac{2}{r} \gamma_{Ad}(\partial_b r)) \\
&\quad + \frac{1}{2r} (\partial_d r) (\partial_b \gamma_{Ac} + \partial_c \gamma_{Ab} - \hat{D}_A \gamma_{bc}) \\
&= \partial_b \partial_{[c} \gamma_{d]A} + \hat{D}_A \partial_{[d} \gamma_{c]b} + \frac{1}{r} (\partial_b \gamma_{A[c}(\partial_{d]} r) + \hat{D}_A \gamma_{b[d}(\partial_{c]} r) + \partial_{[c} \gamma_{Ab}(\partial_{d]} r))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{AbCd} &= \eta_{ed} \delta R_{AbC}{}^d = \eta_{ed} \left[-\partial_A \delta \Gamma_{bC}^e + \partial_b \Gamma_{AC}^e + \Gamma_{AC}^f \delta \Gamma_{bf}^e + \Gamma_{AC}^F \delta \Gamma_{bF}^e \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{bC}^f \delta \Gamma_{Af}^e - \Gamma_{bC}^F \delta \Gamma_{AF}^e - \Gamma_{Af}^e \delta \Gamma_{bC}^f - \Gamma_{AF}^e \delta \Gamma_{bC}^F + \underbrace{\Gamma_{be}^e}_{=0} \delta \Gamma_{AC}^e \right] \\
&= \eta_{ed} \left[-\hat{D}_A \delta \Gamma_{bC}^e - \Gamma_{AC}^F \delta \Gamma_{bF}^e + \partial_b \Gamma_{AC}^e + \underbrace{\Gamma_{AC}^f}_{=-r(\partial^f r)_{sAC}} \delta \Gamma_{bf}^e + \Gamma_{AC}^F \delta \Gamma_{bF}^e \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\Gamma_{bC}^f}_{=0} \delta \Gamma_{Af}^e - \underbrace{\Gamma_{bC}^F}_{=\frac{1}{r}(\partial_b r)_{\delta_C^F}} \delta \Gamma_{AF}^e - \underbrace{\Gamma_{Af}^e}_{=0} \delta \Gamma_{bC}^f - \underbrace{\Gamma_{AF}^e}_{=r(\partial^e r)_{sAF}} \delta \Gamma_{bC}^F \right] \\
&= \frac{1}{2} \eta_{ed} \eta^{eg} \left[-\hat{D}_A \hat{D}_C \gamma_{bg} - \hat{D}_A \partial_b \gamma_{Cg} + \partial_g \hat{D}_A \gamma_{bC} + \frac{2}{r} \hat{D}_A \gamma_{Cg} (\partial_b r) \right. \\
&\quad \left. + \partial_b \hat{D}_A \gamma_{Cg} + \partial_b \hat{D}_C \gamma_{Ag} - \partial_b \partial_g \gamma_{AC} + 2(\partial_b r) (\partial^f r)_{sAC} \gamma_{gf} \right. \\
&\quad \left. + 2r (\partial^f r)_{sAC} \partial_b \gamma_{gf} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} (\partial_b r) \left(-\hat{D}_A \gamma_{gC} - \hat{D}_C \gamma_{gA} + \partial_g \gamma_{AC} - 2r s_{AC} \gamma_{gf} (\partial^f r) \right) \right. \\
&\quad \left. - r (\partial^f r)_{sAC} \left(\partial_f \gamma_{bg} + \partial_b \gamma_{fg} - \partial_g \gamma_{fb} \right) \right] \\
&+ \frac{r}{2} \eta_{ed} \underbrace{s_{AF} \eta^{FG}}_{=\frac{1}{r^2} \delta_A^G} (\partial^e r) \left(\hat{D}_C \gamma_{bG} + \partial_b \gamma_{CG} - \hat{D}_G \gamma_{bC} - \frac{2}{r} \gamma_{CG} (\partial_b r) \right) \\
&= \hat{D}_C \partial_{[b} \gamma_{A]d} + \frac{1}{2} \partial_d \left(\hat{D}_A \gamma_{bC} - \partial_b \gamma_{AC} \right) + r s_{AC} \left(\frac{1}{2} \partial_d \gamma_{be} + \partial_{[b} \gamma_{e]d} \right) (\partial^e r) \\
&+ \frac{1}{r} \left[\hat{D}_{[C} \gamma_{A]b} (\partial_{dr}) + \hat{D}_{[A} \gamma_{C]d} (\partial_{br}) + \partial_{(d|} \gamma_{AC} (\partial_{|b} r) \right] - \frac{1}{r^2} \gamma_{AC} (\partial_b r) (\partial_{dr})
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2 Explizite Berechnung des linearisierten Riemantensors

Im Folgenden wird die explizite Berechnung einiger Komponenten des linearisierten Riemantensors gegeben. Es werden die Ausdrücke der Störung der Metrik (7.74) f.f. in (6.29) f.f. eingesetzt. Warum die Komponenten des Riemantensors zu unterschiedlichen Ordnungen in r^{-1} entwickelt werden, wird später bei der Konstruktion des Memory-

Tensors ersichtlich werden. Um die Terme so übersichtlich wie möglich zu halten, wird zuletzt die Identität $u\dot{\delta}(\pm u) = \mp\delta(u)$ verwendet. Diese folgt aus

$$\begin{aligned}\int u\dot{\delta}(u)g(u)du &= -\int (u\dot{g}(u))\delta(u)du = -\int (u\dot{g}(u) + g(u))\delta(u)du = -g(0) \\ &= \int -\delta(u)g(u)du.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Die Rechnungen werden für ein auslaufendes Teilchen gezeigt.

$$\delta R_{urur} = \frac{1}{2}\left[\partial_u\partial_r\gamma_{ur} - \partial_u\partial_u\gamma_{rr} + \partial_r\partial_u\gamma_{ru} - \partial_r\partial_r\gamma_{uu}\right]\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}&= \partial_u\partial_r\left[\frac{2\Theta(u)}{r}\left(E + \frac{p^2 - Epf}{E - pf}\right)\right] \\ &\quad - \partial_u\partial_u\left[\frac{2\Theta(u)}{r}\left(E - pf - \frac{u}{r}\frac{p^2 - Epf}{E - pf}\right)\right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right)\end{aligned}\tag{A.7}$$

$$= \partial_u\left[-\frac{2\Theta(u)}{r^2}E - \frac{2\dot{\delta}(u)}{r}\left(E - pf - \frac{u}{r}\frac{p^2 - Epf}{E - pf}\right)\right] + O\left(\frac{u}{r^3}\right)\tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2\dot{\delta}(u)}{r^2}\left(-E + \frac{p^2 - Epf}{E - pf}\right) - \frac{2\dot{\delta}(u)}{r}\left(E - pf - \frac{u}{r}\frac{p^2 - Epf}{E - pf}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{u}{r^3}\right)\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$= -\frac{2\dot{\delta}(u)}{r^2}E - \frac{2\dot{\delta}(u)}{r}(E - pf) + O\left(\frac{u}{r^3}\right)\tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{Auru} &= \frac{1}{2}\left[\partial_u\partial_r\gamma_{uA} - \partial_u\partial_u\gamma_{rA} + \hat{D}_A\partial_u\gamma_{ru} - \hat{D}_A\partial_r\gamma_{uu}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r}\left(-2\partial_u\gamma_{Au} + \hat{D}_A\gamma_{uu}\right)\right]\end{aligned}\tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}&= -\partial_u\partial_u\left\{2\Theta(u)\left[-p(\hat{D}_Af) + \left(\frac{u}{r}\right)\frac{p^2(p - Ef)}{(E - pf)^2}(\hat{D}_Af)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{m}{2r(E - pf)}\hat{\epsilon}_{AB}\left(\frac{pS^u}{(E - pf)}(\hat{D}^Bf) - \hat{S}^B\right)\right]\right\}\end{aligned}\tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}&+ \hat{D}_A\partial_u\left\{\Theta(u)\frac{E}{r} + \frac{p^2 - Epf}{r(E - pf)}\right\} + \partial_u\left\{4\Theta(u)\frac{Ep}{r(E - pf)}(\hat{D}_Af)\right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_u \left\{ -2\Theta(u) \left(\frac{1}{r} \right) \frac{p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} (\hat{D}_A f) \right. \\
&\quad + 2\delta(u) \left[p(\hat{D}_A f) - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} (\hat{D}_A f) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{m}{2r(E-pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\frac{pS^u}{(E-pf)} (\hat{D}^B f) - \hat{S}^B \right) \right] \right\} \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 4\Theta(u) \frac{Ep}{r(E-pf)} (\hat{D}_A f) \left. \right\} + \hat{D}_A \left\{ \delta(u) \left(\frac{E}{r} + \frac{p^2 - Epf}{r(E-pf)} \right) \right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \partial_u \left\{ \Theta(u) \frac{1}{r} \left(\frac{4Ep}{E-pf} - \frac{2p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \right. \\
&\quad + \delta(u) \left[\left(2p - \frac{u}{r} \frac{2p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{m}{r(E-pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\frac{pS^u}{(E-pf)} (\hat{D}^B f) - \hat{S}^B \right) \right] \right\} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \delta(u) \left(\frac{-Ep}{r(E-pf)} + \frac{p^2(p-Ef)}{r(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \delta(u) \frac{1}{r} \left(\frac{3Ep}{E-pf} - \frac{3p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \\
&\quad + \dot{\delta}(u) \left\{ \left(2p - \frac{u}{r} \frac{2p^2(p-Ef)}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \right. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \left. + \frac{m}{r(E-pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\frac{pS^u}{(E-pf)} (\hat{D}^B f) - \hat{S}^B \right) \right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \delta(u) \frac{1}{r} \left(\frac{2Ep}{E-pf} + \frac{m^2 p}{(E-pf)^2} \right) (\hat{D}_A f) \\
&\quad + \dot{\delta}(u) \left\{ 2p(\hat{D}_A f) - \frac{m}{r(E-pf)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}^B - \frac{pS^u}{(E-pf)} (\hat{D}^B f) \right) \right\} \tag{A.16} \\
&\quad \quad \quad + O\left(\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta R_{AuBu} = \frac{1}{2} \left[\hat{D}_B \partial_u \gamma_{Au} - \hat{D}_B \hat{D}_A \gamma_{uu} + \hat{D}_A \partial_u \gamma_{Bu} - \partial_u \partial_u \gamma_{AB} \right. \\ \left. + r s_{AB} \left(2 \partial_u \gamma_{ur} - \partial_u \gamma_{uu} - \partial_r \gamma_{rr} \right) \right] \quad (\text{A.17})$$

$$= -\partial_u \partial_u \left\{ 2r \Theta(u) \left[\left(\frac{p^2}{E - pf} - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{p^3 (p - Ef)}{(E - pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{mp}{r(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{p S^u}{E - pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B} f) \right) \right] \right\} \\ + \frac{s_{AB}}{2} \left[\frac{m^2}{E - pf} - \left(\frac{u}{r} \right) \frac{m^2 p (p - Ef)}{(E - pf)^3} - \frac{2mp}{r(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \right\} \quad (\text{A.18})$$

$$- \partial_u \hat{D}_{(B} \left\{ 4 \Theta(u) \frac{Ep}{(E - pf)} (\hat{D}_A f) \right\} \\ + s_{AB} \partial_u \left\{ \Theta(u) \left[2E + \frac{2p(p - Ef)}{E - pf} - \frac{E^2 + p^2}{E - pf} \right] \right\} + O\left(\frac{u}{r}\right) \\ = \partial_u \left\{ \delta(u) \left[\left(\frac{-2rp^2}{E - pf} + \frac{2up^3(p - Ef)}{(E - pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2mp}{(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{p S^u}{E - pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B} f) \right) \right] \right\} \\ - s_{AB} \left[\frac{rm^2}{E - pf} - \frac{um^2 p (p - Ef)}{(E - pf)^3} - \frac{2mp}{(E - pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \\ + \Theta(u) \left[\frac{2p^3 (p - Ef)}{(E - pf)^3} (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) + s_{AB} \frac{m^2 p (p - Ef)}{(E - pf)^3} \right] \\ - 4 \Theta(u) \left[\frac{Ep^2}{(E - pf)^2} (\hat{D}_B f) (\hat{D}_A f) + \frac{Ep}{E - pf} (\hat{D}_B \hat{D}_A f) \right] \\ + \delta(u) s_{AB} \left[2E + \frac{2p(p - Ef)}{E - pf} - \frac{E^2 + p^2}{E - pf} \right] + O\left(\frac{u}{r}\right) \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(u) \left\{ \left(\frac{-2rp^2}{E-pf} + \frac{2up^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{pS^u}{E-pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B}) f \right) \\
&\quad - s_{AB} \left[\frac{rm^2}{E-pf} - \frac{um^2p(p-Ef)}{(E-pf)^3} - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \Big\} \\
&+ \delta(u) \left\{ \frac{2p^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) + s_{AB} \frac{m^2p(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right\} \tag{A.20} \\
&+ \delta(u) \left\{ \left(-\frac{4Ep^2}{(E-pf)^2} + \frac{2p^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4Ep}{E-pf} (\hat{D}_B \hat{D}_A f) + s_{AB} \frac{m^2p(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \delta(u) s_{AB} \left[E + \frac{p(p-3Ef)}{E-pf} \right] + O\left(\frac{u}{r}\right) \\
&= \delta(u) \left\{ \left(\frac{-2rp^2}{E-pf} + \frac{2up^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{(A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{pS^u}{E-pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B}) f \right) \\
&\quad - s_{AB} \left[\frac{rm^2}{E-pf} - \frac{um^2p(p-Ef)}{(E-pf)^3} - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \Big\} \tag{A.21} \\
&+ \delta(u) \left\{ \left(-\frac{4Ep^2}{(E-pf)^2} + \frac{4p^3(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4Ep}{E-pf} (\hat{D}_B \hat{D}_A f) + s_{AB} \left(E + \frac{p(p-3Ef)}{E-pf} + \frac{2m^2p(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) \right\} \\
&\quad + O\left(\frac{u}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\dot{\delta}(u) \left[-\frac{rp^2}{E-pf} (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad - \frac{mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{A|C} \left(\hat{S}^C - \frac{pS^u}{E-pf} (\hat{D}^C f) \right) (\hat{D}_{|B} f) \\
&\quad \left. - \frac{s_{AB}}{2} \left[\frac{rm^2}{E-pf} - \frac{2mp}{(E-pf)^2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}^D (\hat{D}^C f) \right] \right] \quad (\text{A.22}) \\
&- 2\delta(u) \left[\left(\frac{Ep^2}{(E-pf)^2} + \frac{m^2 p^2}{(E-pf)^3} \right) (\hat{D}_A f) (\hat{D}_B f) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2Ep}{E-pf} (\hat{D}_A \hat{D}_B f) - \frac{s_{AB}}{2} \left(E + \frac{p(p-3Ef)}{E-pf} + \frac{m^2 p(p-Ef)}{(E-pf)^3} \right) \right] \\
&\quad \quad \quad + O\left(\frac{u}{r}\right)
\end{aligned}$$

B Memory-Tensor

Im Folgenden wird die detaillierte Berechnung der Komponenten des Memory-Tensors bis zur nächstführenden Ordnung in r^{-1} gegeben. Die Komponenten \mathfrak{D}^A_B des Memory-Tensors (B.2), wie er sich nach Ausführung der Integrale in (B.1) ergibt, soll in spurfreie und nicht spurfreie Anteile zerlegt werden. Dazu werden in (B.3) mit einem Nullsummentrick zunächst alle Terme, welche keine δ -Distribution beinhalten, in eine spurfreie Form

gebracht.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^A_B = \sum_i \int \int (du)^2 \frac{s^{AC}}{r^2} \left\{ 2\nu_i \delta(u) \left[-\frac{rp_i^2}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}_B f_i) (\hat{D}_C f_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m_i p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \hat{\epsilon}_{(C|D} \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) (\hat{D}_{|B} f_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s_{BC}}{2} \left[\frac{rm_i^2}{E_i - p_i f_i} - \frac{2m_i p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \hat{\epsilon}_{DE} \hat{S}_i^E (\hat{D}^D f_i) \right] \right] \right\} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - 2\nu_i \delta(u) \left[\left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}_B f_i) (\hat{D}_C f_i) \right. \\ \left. + \frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}_B \hat{D}_C f_i) - \frac{s_{BC}}{2} \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right] \Big\} \\ = \sum_i \nu_i \Theta(u) \left[\frac{1}{r(E_i - p_i f_i)} \left(2p_i^2 (\hat{D}^A f_i) (\hat{D}_B f_i) + \delta_B^A m_i^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{2m_i p_i}{r^2 (E_i - p_i f_i)^2} \left[s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) (\hat{D}_{|B} f_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_B^A \hat{\epsilon}_{DE} \hat{S}_i^E (\hat{D}^D f_i) \right] \right] \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{2u}{r^2} \nu_i \Theta(u) \left[\left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}^A f_i) (\hat{D}_B f_i) \right. \\ \left. + \frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \nu_i \Theta(u) \left\{ \frac{2p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\
&\quad + \delta_B^A \frac{p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) + \delta_B^A \frac{m_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \\
&\quad + \frac{m_i p_i}{r^2 (E_i - p_i f_i)^2} \left[-\delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right. \\
&\quad \quad \left. + \left(2s^{AC} \hat{\epsilon}_{C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) \right] \\
&\quad + \frac{u}{r^2} \left[\left(\frac{2E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{2m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \delta_B^A \left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right. \\
&\quad \quad + \frac{4E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) + \delta_B^A \frac{2E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \\
&\quad \quad \left. \left. - \delta_B^A \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right] \right\} \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Für den Drehimpulsbeitrag von Ordnung $O(\frac{1}{r^2})$ in u und r wurde die Identität $\hat{\epsilon}_{AB}(\hat{D}^A f)(\hat{D}^B f) = 0$ verwendet, da dies diesen Term in einen spurfreien und einen nicht spurfreien Term zerlegt, wie sich später durch eine einfache Rechnung zeigen wird.

Für die übrigen Terme werden die spurfreien und nicht spurfreien Anteile so weit wie möglich vereinfacht. Zunächst soll der führende Term, der Ordnung $O(\frac{1}{r})$ in u und r betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{(\text{ord.})_B}^A &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \left\{ \frac{2p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_B^A \frac{p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) + \delta_B^A \frac{m_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \right\} \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Der spurfreie Teil lässt sich nicht weiter vereinfachen. Für den nicht spurfreien Teil werden zunächst die Identitäten $(\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) = (1 - f_i^2)$ und $E_i^2 - p_i^2 = m_i^2$ ausgenutzt und nach algebraischer Umformung die Impuls- und Energieerhaltung $\sum_i \nu_i p_i f_i = 0 = \sum_i \nu_i E_i$, vgl. (2.6), angewandt.

$$\mathfrak{D}_{(\text{ord.})_T}^A{}_B = \sum_i \nu_i \Theta(u) \delta_B^A \left[\frac{p_i^2 - p_i^2 f_i^2 + E_i^2 - p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \right] \tag{B.5}$$

$$= \sum_i \nu_i \Theta(u) \delta_B^A \left[\frac{E_i + p_i f_i}{r} \right] = 0 \quad (\text{B.6})$$

Der führende Beitrag ist also spurfrei und lautet

$$\mathfrak{D}_{(\text{ord.})}^A{}_B = \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{2p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right). \quad (\text{B.7})$$

Der Term von Ordnung $O\left(\frac{u}{r^2}\right)$ in u und r lautet

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{vel.})}^A{}_B &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \left[\left(\frac{2E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{2m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) + \delta_B^A \left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) + \delta_B^A \frac{2E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right. \\ &\quad \left. - \delta_B^A \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right]. \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Er wird ebenfalls so weit wie möglich vereinfacht. Der spurlose Anteil ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{vel.})}^A{}_B &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \left\{ \frac{4E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{2m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \left((\hat{D}^A f_i)(\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right) \right\}. \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Der Spurteil lässt sich unter Benutzung von $(\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) = (1 - f_i^2)$, $(\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) = -2f_i$ und $E_i^2 - p_i^2 = m_i^2$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{vel.})T}^A{}_B &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \left[\delta_B^A \left(\frac{E_i p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) (\hat{D}^C f_i)(\hat{D}_C f_i) \right. \\ &\quad \left. + \delta_B^A \frac{2E_i p_i}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) - \delta_B^A \left(\frac{p_i(p_i - 3E_i f_i)}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i(p_i - E_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right) \right] \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \delta_B^A \left[\frac{E_i p_i^2 (1 - f_i^2)}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i^2 (1 - f_i^2)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4E_i p_i f_i}{E_i - p_i f_i} - \frac{p_i^2 - 3E_i p_i f_i}{E_i - p_i f_i} - \frac{m_i^2 p_i^2 - m_i^2}{E} p_i f_i (E_i - p_i f_i)^3 \right] \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \delta_B^A \left[-\frac{p_i^2 + E_i p_i f_i}{(E_i - p_i f_i)} + \frac{E_i p_i^2 - E_i p_i^2 f_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} + \frac{m_i^2 p_i f_i (E - p f)}{(E_i - p_i f_i)^3} \right] \quad (\text{B.12})$$

$$= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \delta_B^A \left[-\frac{p_i^2 + E_i p_i f_i}{(E_i - p_i f_i)} + \frac{E_i p_i^2 - E_i p_i^2 f_i^2 + E_i^2 p_i f_i - p_i^3 f_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \right] \quad (\text{B.13})$$

$$= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{u}{r^2} \delta_B^A \left[-\frac{p_i^2 + E_i p_i f_i}{(E_i - p_i f_i)} + \frac{E_i p_i f_i (E_i - p_i f_i) + p_i^2 (E_i - p_i f_i)}{(E_i - p_i f_i)^2} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$= 0 \quad (\text{B.15})$$

und verschwindet ebenfalls. Nun soll zuletzt der Drehimpulsbeitrag der Ordnung $O(\frac{1}{r^2})$ in u und r betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{spin})}{}^A{}_B &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{m_i p_i}{r^2 (E_i - p_i f_i)^2} \left[-\delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right. \\ &\quad \left. + \left(2s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Er wird in einen spurfreien Teil $\mathfrak{D}_{(\text{spin})_{TF}}{}^A{}_B$ und einen Spurterm $\mathfrak{D}_{(\text{spin})_T}{}^A{}_B$ zerlegt.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\text{spin})_{TF}}{}^A{}_B &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \underbrace{\frac{m_i p_i}{r^2 (E_i - p_i f_i)^2} \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right)}_{:=\Xi_i^D} \\ &\quad \cdot \left(2s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathfrak{D}_{(\text{spin})_T}{}^A{}_B = - \sum_i \nu_i \Theta(u) \frac{m_i p_i}{r^2 (E_i - p_i f_i)^2} \delta_B^A \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \quad (\text{B.18})$$

Es wird gezeigt, dass $\mathfrak{D}_{(\text{spin})_{TF}}{}^A{}_B$ tatsächlich spurfrei ist.

$$\text{tr}(\mathfrak{D}_{(\text{spin})_{TF}}{}^A{}_B) = \sum_i \Xi_i^D \left(2s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} (\hat{D}_{|A} f_i) - 2\hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \quad (\text{B.19})$$

$$= \sum_i \Xi_i^D \left(s^{AC} \hat{\epsilon}_{AD} (\hat{D}_C f_i) - \underbrace{s^{AC} \hat{\epsilon}_{CD}}_{A \rightarrow C, C \rightarrow A} (\hat{D}_A f_i) \right) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Werden alle Komponenten des Memory-Tensors, (B.7), (B.9), (B.17) und (B.18), wieder zusammengefasst, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^A_B &= \sum_i \frac{2\nu_i \Theta(u) p_i^2}{r(E_i - p_i f_i)} \left\{ \left((\hat{D}^A f_i) (\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i) (\hat{D}_C f_i) \right) \right. \\ &+ \frac{u}{r} \left[2 \frac{E_i}{p_i} \left((\hat{D}^A \hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C \hat{D}_C f_i) \right) \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{E_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) \left((\hat{D}^A f_i) (\hat{D}_B f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} (\hat{D}^C f_i) (\hat{D}_C f_i) \right) \right] \quad (\text{B.21}) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\frac{m_i}{p_i}}{E_i - p_i f_i} \left[- \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} \hat{S}_i^D (\hat{D}^C f_i) \right. \\ &+ \left. \left. \left(s^{AC} \hat{\epsilon}_{(C|D} (\hat{D}_{|B} f_i) - \frac{\delta_B^A}{2} \hat{\epsilon}_{CD} (\hat{D}^C f_i) \right) \left(\hat{S}_i^D - \frac{p_i S_i^u}{E_i - p_i f_i} (\hat{D}^D f_i) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die Komponenten \mathfrak{D}^r_β des Memory-Tensors lassen sich nicht weiter zerlegen. Insbesondere verschwindet der Spurterm \mathfrak{D}^r_r wie in (A.2) gezeigt, sodass keine Zerlegung der Komponenten in spurfreie Anteile und Spuranteile möglich ist. Da sich die Komponenten \mathfrak{D}^r_β und \mathfrak{D}^u_β lediglich durch ein Vorzeichen unterscheiden wird im Folgenden nur die Berechnung für \mathfrak{D}^r_β gezeigt. Die führende Ordnung dieser Komponenten ist bereits ein subdominanter Effekt, sodass diese nur bis zur Ordnung $O(r^{-1})$ entwickelt werden. Sie ergeben sich durch Ausführen der Integrale über du in (8.7).

$$\mathfrak{D}^r_A = - \int \int (du)^2 \eta^{rr} \sum_i \nu_i \delta(u) \frac{1}{r} \left(\frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) (\hat{D}_A f_i) \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} &- \nu_i \dot{\delta}(u) \frac{m_i}{r(E_i - p_i f_i)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}_i^B - \frac{p_i S_i^u}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^B f_i) \right) \\ &= \sum_i \nu_i \Theta(u) \left\{ - \frac{u}{r} \left(\frac{2E_i p_i}{E_i - p_i f_i} + \frac{m_i^2 p_i}{(E_i - p_i f_i)^2} \right) (\hat{D}_A f_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_i}{r(E_i - p_i f_i)} \hat{\epsilon}_{AB} \left(\hat{S}_i^B - \frac{p_i S_i^u}{(E_i - p_i f_i)} (\hat{D}^B f_i) \right) \right\} \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Die Komponenten \mathfrak{D}^A_r und \mathfrak{D}^u_A ergeben sich aus obiger Berechnung durch die Beziehungen

$$\mathfrak{D}^A_r = \frac{s^{AB}}{r^2} \mathfrak{D}^r_B \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}^r_A = -\mathfrak{D}^u_A. \quad (\text{B.24})$$

Literatur

- [1] Robert Wald *General Relativity* University of Chicago Press, 1984, ISBN 0-226-87033-2
- [2] N.M.J. Woodhouse *General Relativity* Springer-Verlag London, 2007, ISBN-13: 978-1-84628-486-1
- [3] Luc Blanchet, *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, 2016, arXiv:1310.1528v4
- [4] A. Papapetrou, *Spinning test-particles in general relativity I*, 1951, Physics Department, University of Manchester, doi: 10.1098/rspa.1951.0200
- [5] Alexander Tolish, Lydia Bieri, David Garfinkle, Robert Wald, *Examination of a simple example of gravitational wave memory*, 2014, arXiv:1405.6396v1
- [6] Roger Penrose, *Asymptotic Properties of Fields and Space-Times*, 1963, doi:10.1103/PhysRevLett.10.66
- [7] Hermann Bondi, *Gravitational Waves in General Relativity*, Nature 186: 535, 1960, doi:10.1038/186535a0.
- [8] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A. W. K. Metzner, *Gravitational Waves in General Relativity. VII. Waves from Axi-Symmetric Isolated Systems*, Proc. R. Soc. London Ser.A 269: 21, 1962, doi:10.1098/rspa.1962.0161.
- [9] Hermann Bondi and F. A. E. Pirani, *Gravitational Waves in General Relativity. 13: Caustic Property of Plane Waves*, 1989, Proc. Roy. Soc. Lond. A 421 395.
- [10] Ya. B. Zel'dovich, A. G. Polnarev, *Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars*, 1974, Sov. Astron. 18 17.
- [11] P.M. Zhang, C. Duval, G.W. Gibbons, P.A. Horvathy, *The Memory Effect for Plane Gravitational Waves*, 2017, arXiv:1704.05997v4
- [12] P.M. Zhang, C. Duval, P.A. Horvathy, *Memory Effect for Impulsive Gravitational Waves*, 2017, arXiv:1709.02299v2
- [13] Davide Castelvecchi, Alexandra Witze, *Einstein's gravitational waves found at last*, 2016, doi:10.1038/nature.2016.19361
- [14] Priyamvada Natarajan, Ezequiel Treister, *Is there an upper limit to black hole masses?*, 2008, arXiv:0808.2813
- [15] P. Kharb, D.V. Lal, D. Merritt, *A candidate sub-parsec binary black hole in the Seyfert galaxy NGC 7674*, 2017, doi:10.1038/s41550-017-0256-4
- [16] L. Filipe O. Costa, José Natário, *Center of mass, spin supplementary conditions, and the momentum of spinning particles*, 2015, arXiv:1410.6443v2
- [17] Marc Favata, *The gravitational-wave memory effect*, 2010, arXiv:1003.3486v1