Probeklausur zu Theoretische Physik 4 (12-PHY-BTP4), SS 16

Aufgabe 1. 6 P.

Wir betrachten die Bewegung von Ladungen q in einer Leiterplatte in der $x - y$ Ebene. Wir legen ein $\vec{E}$ Feld in x-Richtung und ein $\vec{B}$ Feld in z-Richtung an. Auf die bewegten Ladungen wirke eine Reibungskraft $\vec{F}_R = -K\dot{\vec{r}}$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für eine Ladung q auf und finden Sie die stationäre Lösung mit $\dot{\vec{r}} =$ konstant. (3 P.)

b) Die Flächendichte der Ladungsträger sei σ und die Platte habe Abmessungen L_x, L_y in x und y Richtung. Bestimmen Sie im stationären Fall den Oberflächenstrom K_x in x-Richtung und die zugehörige Konduktivität. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $B \to \infty$ der Strom verschwindet. (3 P.)

Aufgabe 2. 8 P.

Wir betrachten die in Abbildung 1 skizzierte Anordnung. Der Leiter mit Rändern in $y = |x|$ ist in z Richtung unendlich ausgedehnt und geerdet.

a) Wie lautet die Poisson-Gleichung und die entsprechenden Randbedingungen für dieses Problem? (2 P.)

b) Zeigen Sie, dass sich die Poisson-Gleichung für die Ladung q in $\vec{r} = (0, d, 0)$ mit Spiegelladungen lösen lässt. (2 P.)

c) Bestimmen Sie Mono-, Di- und Quadropolmoment der entsprechenden Ladungsverteilung. Mit welcher Potenz fällt die elektrische Feldstärke in $(0, y, 0)$ für $y \to \infty$ ab? Vergleichen Sie diesen Abfall mit der Situation einer Ladung oberhalb eines Leiters mit Rand in $y = 0$. (4 P.)

Aufgabe 3. 10 (+2) P.

Wir betrachten eine elektromagnetische Kugelwelle in Vakuum, deren Vektorpotential auf $\vec{x} \neq 0$ die Form

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_r)}{|\vec{x}|}, \qquad t_r := t - \frac{|\vec{x}|}{c}$$

hat, wobei $\vec{p}(t)$ das Dipolomoment der Ladungsdichte zur Zeit t bezeichnet. Diese Form ist bekannt aus der Dipolnäherung in der Strahlungszone. Für das skalare Potential nehmen wir

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}}(t_r)}{c|\vec{x}|^2} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}(t_r)}{|\vec{x}|^3} \right),$$

wobei $Q \in \mathbb{R}$ die Gesamtladung ist. Der letzte Term geht über die Dipolnäherung hinaus und wird bei großem $|\vec{x}|$ oft vernachlässigt.

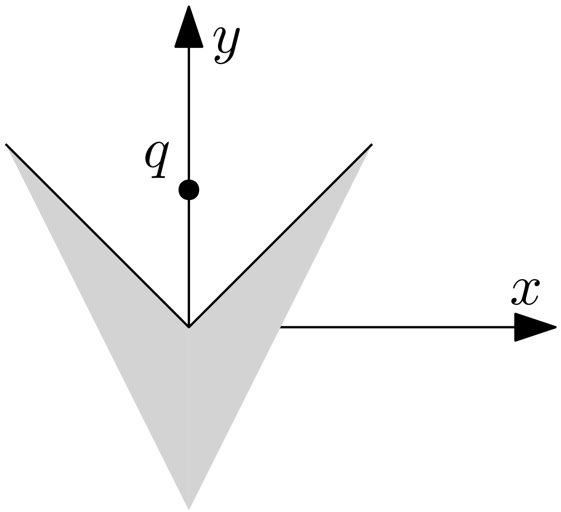

Abbildung 1: Zu Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie dass $A^\mu = (c^{-1}\varphi, \vec{A})$ auf $\vec{x} \neq 0$ die Lorenz-Eichung erfüllt: $\partial_\mu A^\mu = 0$. (3 P.)

b) Zeigen Sie dass

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{-\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{x}\times\ddot{\vec{p}}(t_r)}{c|\vec{x}|^2} + \frac{\vec{x}\times\dot{\vec{p}}(t_r)}{|\vec{x}|^3}\right).$$

(2 P.)

Auch das elektrische Feld kann direkt berechnet werden. Bis auf Terme der Ordnung $|\vec{x}|^{-2}$ erhält man:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = c\frac{\vec{B}(\vec{x},t)\times\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Wir betrachten nun die Energiedichte W und die Energiestromdichte $\vec{S}$,

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2, \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}.$$

c) Zeigen Sie mit obiger Näherung für $\vec{E}$ dass die Energiestromdichte gegeben ist durch

$$\vec{S} = cW\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

und dass W und $\vec{S}$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0.$$

erfüllen, bis auf Terme der Ordnung $|\vec{x}|^{-3}$. (5 P.)

d) Bonusaufgabe: Zeigen Sie dass $\Box A^0 = 0$ auf $\vec{x} \neq 0$. (2 P.)

Aufgabe 4. 8 P.

Eine Ladung q bewegt sich auf einer Weltkurve $\xi^\mu(s)$, die durch die Eigenzeit s parametrisiert ist. Dabei benutzen wir Intertialkoordinaten $x^\mu = (ct, \vec{x})$. Diese bewegte Ladung erzeugt eine Viererstromdichte

$$j^\mu(\vec{x}, t) = qc \int \dot{\xi}^\mu(s)\delta(\vec{x} - \vec{\xi}(s))\delta(ct - \xi^0(s))\, ds$$

und ein retardiertes Viererpotential, das Liénard-Wiechert-Potential,

$$A^\mu_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \left. \frac{\dot{\xi}^\mu(s)}{r_\nu(s)\dot{\xi}^\nu(s)} \right|_{s=s_0},$$

wobei $r^\mu(s) := x^\mu - \xi^\mu(s)$ und s_0 ist die eindeutige Eigenzeit für die $r^\mu(s_0)$ lichtartig und zukunftsweisend ist.

a) Bestimmen Sie $j^\mu(\vec{x}, t)$ und $A^\mu_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ für den Spezialfall $\xi^\mu(s) = (cs, \vec{0})$. (2 P.)

Wir betrachten nun eine beliebige Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit $\vec{\beta}$,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + |\vec{\beta}|^{-2}(\gamma - 1)\beta\beta^T \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ für die neue Inertialkoordinaten, und wir drücken die Weltkurve ξ^μ in den neuen Koordinaten x' aus durch $(\xi')^\mu(s) = \Lambda^\mu{}_\nu \xi^\nu(s)$.

b) Bestimmen Sie das transformierte Liénard-Wiechert-Potential $(A'_{\text{ret}})^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu_{\text{ret}}(x)$ explizit als Funtion von x' und $(r')^\mu = (x')^\mu - (\xi')^\mu$. (2 P.)

c) Leiten Sie jetzt die allgemeine Form des Liénard-Wiechert-Potentials aus dem Spezialfall (a) her. Hinweis: Wählen Sie einen beliebigen Punkt $x = (\vec{x}, t)$ mit der zugehörigen Eigenzeit s_0, und wählen Sie dann geeignete Inertialkoordinaten (z.B. so dass $\xi(s_0) = 0$, $\dot{\xi}(s_0) = (c, \vec{0})$) um das Problem zu vereinfachen. (4 P.)

Nützliche Identitäten:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}(\psi\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi\vec{a}) = (\vec{\nabla}\psi) \times \vec{a} + \psi\vec{\nabla} \times \vec{a}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\psi) = \vec{a}'(\psi) \cdot \vec{\nabla}\psi, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\psi) = (\vec{\nabla}\psi) \times \vec{a}'(\psi), \tag{5}$$

$$Q_{ij} = \int (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2)\rho(\vec{r})\mathrm{d}^3 r \qquad \text{Quadrupolmoment} \tag{6}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}Q_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5} + \dots\right) \qquad \text{Multipolentwicklung} \tag{7}$$