Übungen zu Theoretische Physik 4 (12-PHY-BTP4), SS 16

Serie 9
Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 7.6.

Übung 1. 3 P.

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols $\vec{m}$ ist durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

gegeben. Zeigen Sie dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ dieses Dipols

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{x}|^3} \right)$$

ist.

Übung 2. 6 P.

Wir betrachten einen kreisförmigen Leiterring Γ dessen Stromdichte durch

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \int_\Gamma \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \mathrm{d}\vec{\xi}$$

gegeben ist, wobei $\xi(\phi) := (R\cos(\phi), R\sin(\phi), 0)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, eine Parametrisierung des Leiterrings ist.

a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung dass das magnetische Dipolmoment $\vec{m} = I\pi R^2 \vec{e}_z$ ist, wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor entlang der z-Achse ist.

Wir legen jetzt ein äußeres Magnetfeld $\vec{B}$ an, das sich nur schwach verändert über Distanzen der Größe R.

b) Die Wechselwirkungsenegie zwischen Leitterring und Magnetfeld ist

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \; \mathrm{d}\vec{x} \;,$$

wobei $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Zeigen Sie dass $\mathcal{E} = \vec{m} \cdot \vec{B}(0)$ wenn Variationen in $\vec{B}$ vernachlässigt werden. Hinweis: benutzen Sie den Satz von Stokes.

c) Das Magnetfeld übt ein Drehmoment

$$\vec{N} := \int_{\mathbb{R}^3} \vec{x} \times (\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) \; \mathrm{d}\vec{x}$$

auf den Leiterring aus. Zeigen Sie dass $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(0)$ wenn Variationen in $\vec{B}$ vernachlässigt werden. In welche Richtung wird der Leiterring sich drehen?

d) Das Magnetfeld übt eine Kraft

$$\vec{F} := \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\ \mathrm{d}\vec{x}$$

auf den Leiterring aus. Zeigen Sie dass $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})|_{\vec{x}=0}$ wenn Variationen in $\vec{B}$ zur niedrigsten Ordnung mitgerechnet werden. In welche Richtung wird sich der Leiterring bewegen?

Übung 3. 3 P.

Eine para- oder diamagnetische Kugel mit der relativen Permeabilität μ wird in ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0$ gebracht. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ innerhalb und außerhalb der Kugel sowie die Magnetisierung $\vec{M}$ der Kugel. Hinweis: Machen Sie bei Ihrer Lösung vom Superpositionsprinzip Gebrauch und verwenden Sie dass die magnetische Induktion einer homogen magnetisierten Kugel in Vakuum gegeben ist durch

$$\vec{B}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M} & |\vec{x}| < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right) & |\vec{x}| > R \end{cases}$$

wobei $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$.