
TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 9

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 17.12.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 19.12.2024** und **Freitag, 20.12.2024** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden:
https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: <https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952>

25. Freie Energie eines Zweiniveausystems

4 Punkte

Finden Sie einen Ausdruck für die freie Energie als Funktion der Temperatur für ein System aus zwei Zuständen mit Energien $E_1 = 0$ und $E_2 = \epsilon$.

Ausgehend von der freien Energie, leiten Sie die innere Energie E und Entropie S des Systems ab und zeigen Sie, dass $\lim_{T \rightarrow 0^+} S = 0$ und $\lim_{T \rightarrow \infty} S = \ln(2)$.

*26. Magnetische Suszeptibilität

1+1+1+2 Points

Wir betrachten ein System aus N Spins S_i in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Das Magnetfeld sei parallel zur Spin-Quantisierungsachse, sodass der Energiebeitrag eines Spins entweder $E(S = +1) = -\mu B$ ist, wenn der Spin parallel zum Feld ist, oder $E(S = -1) = +\mu B$, wenn der Spin antiparallel zum Feld ist.

Ziel dieser Aufgabe ist es, aus der Zustandssumme $Z_1 = \sum_S e^{-\beta E(S)}$ einen Ausdruck für die Magnetisierung (magnetisches Moment per Volumen) $M = \frac{\mu \langle S \rangle}{V}$ und die Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$ abzuleiten. Hierbei ist $\mu = -\mu_B g / \hbar$ das magnetische Moment eines einzelnen Spins mit Bohr-Magneton μ_B und gyromagnetischem Verhältnis g .

(a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme Z_N gegeben ist durch

$$Z_N = [2 \cosh(\beta \mu B)]^N . \quad (1)$$

(b) Wir definieren die Teilchenkonzentration $n = N/V$. Zeigen Sie, dass die Magnetisierung M gegeben ist durch

$$M = n \mu \tanh(\beta \mu B) . \quad (2)$$

(c) Berechnen Sie die Suszeptibilität χ und zeigen Sie, dass χ im Grenzwert $\mu B \beta \ll 1$ durch $\chi \approx n \mu^2 \beta$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie die freie Energie und drücken Sie diese nur durch die Parameter T und $x = \frac{M}{n \mu}$ aus.

27. Rotation zweiatomiger Moleküle

1+1+1+2+2 Punkte

Bei der Betrachtung idealer Gase wird häufig nur die Translationsenergie der Teilchen berücksichtigt. In dieser Aufgabe wollen wir auch die Rotationsenergie betrachten. Die Rotationsbewegung sei quantisiert und die Energieniveaus eines zweiatomigen Moleküls seien von der Form

$$\mathcal{E}(j) = j(j+1)\epsilon_0 . \quad (3)$$

Hier ist $j = 0, 1, 2, \dots$ und die Multiplizität eines Levels sei $g(j) = 2j + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$Z_R(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\beta j(j+1)\epsilon_0} . \quad (4)$$

die Zustandssumme für ein Molekül ist.

- (b) Bestimmen Sie $Z_R(\beta)$ approximativ für $\beta\epsilon_0 \ll 1$ indem Sie die Summe in ein Integral umwandeln.
- (c) Bestimmen Sie $Z_R(\beta)$ approximativ für $\beta\epsilon_0 \gg 1$ indem Sie die Summe nach dem zweiten Term abschneiden.
- (d) Berechnen Sie die Energie und Wärmekapazität als Funktion von β in beiden Grenzfällen.

Hinweis: Im Fall $\beta\epsilon_0 \ll 1$ sollte sich der Beitrag der Rotation zur Wärmekapazität des zweiatomigen Moleküls dem Wert k_B annähern.

- (e) Skizzieren Sie das Verhalten der Energie und Wärmekapazität als Funktion der Temperatur. Zeichnen Sie das Grenzverhalten für $T \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow 0$ ein.