Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 8

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 10.12.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 12.12.2024** und **Freitag, 13.12.2024** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

*22. Ideales Gas

2+2+2 Points

Wir betrachten ein ideales Gas aus N Teilchen in einem Behälter mit Volumen V. Der Hamiltonian sei gegeben als $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$.

(a) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $|\Gamma(M(E, E + \Delta E))|$ der Energieschale $M(E, E + \Delta E)$ analog zu Blatt 2, Aufgabe 4. Entwickeln Sie $|\Gamma(M(E, E + \Delta E))|$ zu führender Ordnung in ΔE.

(b) Berechnen Sie damit die Gibbs Entropie $S(N, E)$ des mikrokanonischen Ensembles und zeigen Sie, dass

$$S(N,E) \approx k_B N \left\{ \ln\left[\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{N} \right] + \frac{5}{2} \right\} . \tag{1}$$

Hinweis: Sie können annehmen, dass $N \gg 1$.

(c) Berechnen Sie die Temperatur T und das chemische Potential μ aus der Gibbs Entropie aus Aufgabenteil (b).

Hinweis: Sie können verwenden, dass sich das chemische Potential via $\partial S/\partial N = -\mu/T$ aus der Entropie berechnen lässt.

23. Thermodynamische Potentiale

2+2 Punkte

Man kann zeigen, dass die freie Energie für ein ideales Gas im kanonischen Ensemble gegeben ist durch

$$F(T, N, V) = -TN \left[1 + \ln\left(\frac{V(2\pi m T)^{3/2}}{Nh^3} \right) \right] . \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie die thermodynamischen Größen $\mu(T, N, V), N(T, \mu, V), J(T, N, V)$ und zeigen Sie, dass

$$J(T, \mu, V) = -TV e^{\frac{\mu}{T}} \left(\frac{2\pi m T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} . \tag{3}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst μ aus F. Lösen Sie dann den Ausdruck für $\mu(T, N, V)$ nach N, um $N(T, \mu, V)$ zu erhalten. Verwenden Sie dann die Beziehung zwischen großkanonischem Potential, freier Energie F, μ und N, um $J(T, N, V)$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie nun $J(T, \mu, V)$ erneut, indem Sie in

$$\mathrm{e}^{-\frac{J(T,\mu,V)}{T}} = \sum_{N \geq 0} \mathrm{e}^{\frac{N\mu}{T}} \mathrm{e}^{-\frac{F(T,N,V)}{T}} \tag{4}$$

eine Sattelpunktsnäherung um die wahrscheinlichste Teilchenzahl $\tilde{N}$ durchführen.

24. Energiefluktuationen *5 Punkte*

Betrachten Sie ein System mit festem Volumen im thermischen Kontakt mit einem Reservoir. Zeigen Sie, dass die mittleren quadratischen Fluktuationen der Energie des Systems gegeben sind durch

$$\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle = T^2 \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \quad . \tag{5}$$

Hierbei ist $E = \langle H \rangle$ die mittlere Energie des Systems.

Hinweis: Verwenden Sie die Zustandssumme um $\partial E / \partial T$ mit den mittleren quadratischen Fluktuationen in Verbindung zu setzen. Es kann nützlich sein, das Quadrat explizit auszuschreiben. Für diese Aufgabe, setzen Sie $k_B = 1$.