Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 6

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 26.11.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 28.11.2024** und **Freitag, 29.11.2024** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

16. Geschwindigkeitsverteilung im idealen Gas *1+1+2+2 Punkte*

Wir betrachten ein nicht-relativistisches ideales Gas aus N Teilchen in einem Behälter mit Volumen V. Das Gas sei im thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T. Die Energie eines Teilchens ist $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m}$. In der Vorlesung wurde der folgende Ausdruck für die Teilchendichte hergeleitet:

$$n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \frac{N\mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}}{\int \mathrm{d}^3r \int \mathrm{d}^3p \ \mathrm{e}^{-\beta H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}} \ , \tag{1}$$

wobei $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

(a) Sei $N(v)\mathrm{d}v$ die Anzahl der Teilchen mit Betrag der Geschwindigkeit im Bereich $[v, v + \mathrm{d}v]$. Berechnen Sie $N(v)\mathrm{d}v$ indem sie das Integral über die Teilchendichte zur führenden Ordnung in $\mathrm{d}v$ entwickeln. Bestimmen Sie daraus die Verteilungsfunktion $N(v)$ der Geschwindigkeitsbeträge und zeigen Sie, dass

$$N(v) = N \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \,\mathrm{e}^{-\beta \frac{mv^2}{2}} \ . \tag{2}$$

(b) Bestimmen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $v_p(T)$ als Funktion der Temperatur.

(c) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle(T)$.

(d) Skizzieren Sie $N(v)$ für zwei verschiedene Werte der Temperatur in dasselbe Koordinatensystem und zeichnen Sie jeweils $v_p(T)$ und $\langle v \rangle(T)$ ein.

*17. 1D Ising-Modell mit Wechselwirkung *2+2+1+1 Points*

Wir betrachten eine Kette aus $N + 1$ interagierenden Ising-Spins S_i. Die erlaubten Werte eines Spins sind $S_i = \pm 1$ mit $i = 0, 1, ..., N$. Die Energie eines Mikrozustands $\{S_i\}$ sei

$$H(\{S_i\}) = -J \sum_{i=1}^{N} S_i S_{i-1} \tag{3}$$

mit $J \in \mathbb{R}$.

(a) Wir definieren nun Makrozustände über die Energie der Spin-Kette. Sei der Makrozustand $M(E_\nu)$ die Menge aller Mikrozustände mit Energie E_ν. Bestimmen Sie die möglichen Energiewerte E_ν und die Anzahl der Mikrozustände im Makrozustand $M(E_\nu)$. Berechnen Sie daraus die Boltzmann Entropie S_B und zeigen Sie, dass für $1 \ll \frac{1}{2}\left(\frac{E}{J}+N\right) \ll N$ gilt

$$S_B(E) \approx k_B \left[N\ln(N) - \frac{1}{2}\left(N+\frac{E}{J}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\left(N+\frac{E}{J}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(N-\frac{E}{J}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\left(N-\frac{E}{J}\right)\right)\right].$$

Hinweis: Drücken Sie die Energie über die Anzahl n_ν der "gebrochenen Bonds", d.h. die Anzahl von Paaren anti-paralleler Spins, aus (Beispiel: $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \longrightarrow n_\nu = 1$, oder $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \longrightarrow n_\nu = 3$). Nutzen Sie die Stirling-Formel für $1 \ll n_\nu \ll N$.

(b) Bestimmen Sie die Energieabhängigkeit der Temperatur $T(E)$ aus der Entropie und zeigen Sie dann, dass

$$E(T) = -JN\tanh\left(\frac{J}{k_B T}\right) . \tag{4}$$

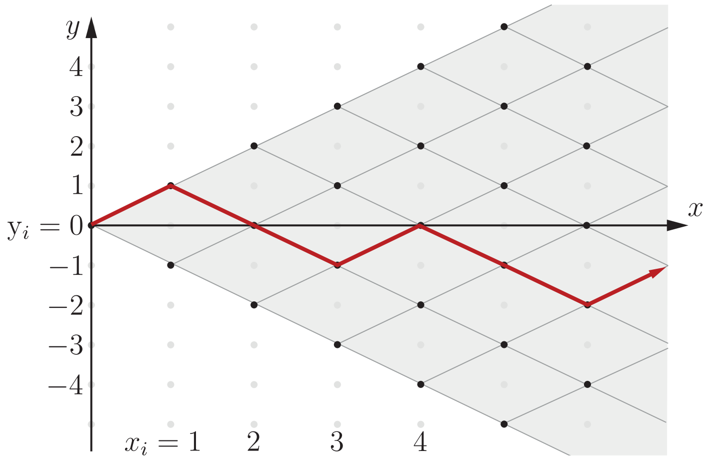
(c) Nutzen Sie das Ergebnis aus (b) um die Wärmekapazität mittels $C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$ abzuschätzen.

(d) Skizzieren Sie $E(T)$ und $C_V(T)$ als Funktion der Temperatur. Wie verhalten sich die Größen als Funktion von N?

18. Polymerkette

1+1+2+2 Punkte

In einem vereinfachten Modell betrachten wir eine Kette aus $N+1$ Atomen, welche die folgenden Zustände annehmen kann: Die Atome $i = 0, 1, ..., N$ befinden sich auf Plätzen (x_i, y_i) eines zweidimensionalen Gitters, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$. Das Atom $i = 0$ sei am Ursprung $(x_0, y_0) = (0, 0)$ fixiert. Die Atome sind miteinander verbunden, sodass $x_i - x_{i-1} = 1$ und $|y_i - y_{i-1}| = 1$. Dies ist ein Modell für ein in x-Richtung orientiertes Polymer, welches beispielsweise keine Schleifen bilden kann. Ein Beispiel ist in der Abbildung dargestellt.



(a) Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Mikrozustände.

(b) Definieren wir nun einen Makrozustand $M(N, y)$ als die Menge aller Mikrozustände mit gleichem Endpunkt $(x_N, y_N) = (N, y)$. Sei $W(N, y)$ die Anzahl der Mikrozustände für Makrozustand $M(N, y)$. Zeigen Sie, dass

$$W(N, y) = \frac{N!}{\left(\frac{N+y}{2}\right)!\,\left(\frac{N-y}{2}\right)!} . \tag{5}$$

(c) Seien nun neue Makrozustände $M(i,y)$ über die Position $(x_i, y_i) = (i,y)$ von Atom i definiert. Bestimmen Sie die Anzahl der Mikrozustände $W(i,y)$. Für welche Werte von y existieren die meisten Mikrozustände?

(d) Berechnen Sie die typische Auslenkung des Endpunktes

$$\bar{y}_N = \sqrt{\frac{\sum_y y^2 W(N,y)}{\sum_y W(N,y)}} \,. \tag{6}$$

Über welche Werte von y laufen die Summen? Sie können hier annehmen, dass N gerade ist.

Hinweis: Um die Summen auszuwerten, kann es hilfreich sein $G_N(z) = \sum_y W(N,y) z^y$ *zu berechnen und zu verwenden, dass gilt* $y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^y \,|_{z=1}$.