
TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 5

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 19.11.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 22.11.2024** und **Freitag, 23.11.2024** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden:
https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: <https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952>

13. Dirac-Delta Distribution

2+2+3 Punkte

Wir bezeichnen eine Funktionenfolge $\{\delta_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ als Dirac-Folge, wenn sie normiert ist, d.h. wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

erfüllt ist, und für jede Testfunktion $f(x)$ die Filtereigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0) \quad (2)$$

gilt. In Gleichung (2) ist zu beachten, dass der Grenzwert *nicht* mit dem Integral vertauscht werden kann. Insbesondere konvergiert die Folge δ_n *nicht* gegen eine Funktion und für die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \delta(x)$ ist $\delta(x)$ als Distribution zu verstehen.

Wir betrachten die Funktionenfolgen

$$g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} \quad (3)$$

$$h_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Folgen die Normierungseigenschaft (1) erfüllen und skizzieren Sie die Funktionen $g_n(x)$ und $h_n(x)$ für einige Werte von $n \in \mathbb{N}$. Wie verhalten sich die Funktionen qualitativ für wachsende n ?
- (b) Sei $f(x)$ eine Testfunktion, die in eine überall konvergente Taylorreihe entwickelt werden kann¹. Zeigen Sie, dass dann die Filtereigenschaft (2) für die Funktionenfolgen $g_n(x)$ und $h_n(x)$ erfüllt ist.

¹Diese strengen Einschränkungen an $f(x)$ sind tatsächlich nicht notwendig, damit die Filtereigenschaft erfüllt ist. Es würde schon ausreichen, dass $f(x)$ stetig in $x = 0$ ist und dass die Integrale in Gleichung (2) für alle n absolut konvergieren.

(c) Zeigen Sie nun ausgehend von der Filtereigenschaft

$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{für } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } a < b, \quad (5)$$

die folgenden Eigenschaften der Dirac-Delta Distribution $\delta(x)$ für $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (i)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (ii)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x) \quad (iii)$$

Prüfen Sie für die Dirac-Folge $h_n(x)$ aus Gleichung (4), dass für eine stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ mit endlich vielen, isolierten, einfachen Nullstellen x_ν gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(g(x)) = \sum_{x_\nu} \frac{f(x_\nu)}{|g'(x_\nu)|}. \quad (iv)$$

14. Grenzwerte der Binomialverteilung

2+2+2 Punkte

Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei N unabhängigen, identisch verteilten Zufallsexperimenten mit zwei möglichen Ergebnissen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit $(1 - p)$ genau n Erfolge zu erzielen:

$$P_{\text{bin}}(n; N, p) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}. \quad (6)$$

Man bezeichnet solche Zufallsreihen unabhängiger Messungen von binären Ereignissen mit festen Wahrscheinlichkeiten als Bernoulli-Prozesse.

- (a) Berechnen Sie für die Binomialverteilung den Erwartungswert $\langle n \rangle$ und die Varianz $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$.
- (b) Betrachten Sie nun den Fall großer N und zeigen Sie, dass die Binomialverteilung im Grenzfall sehr kleiner Wahrscheinlichkeit p in eine Poisson-Verteilung

$$P_{\text{p}}(n; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (7)$$

übergeht. Betrachten Sie dafür den Limes $N \rightarrow \infty$, $Np \rightarrow \lambda < \infty$, $n \ll N$.

- (c) Für den Fall nicht verschwindend kleiner p zeigen Sie, dass sich die Binomialverteilung im Limes großer N , wie vom zentralen Grenzwertsatz vorhergesagt, einer Gaußverteilung $\mathcal{N}(Np, Np(1 - p))$ annähert. Betrachten Sie dafür den Fall $N \rightarrow \infty$, $p \approx \frac{n}{N} \sim \frac{1}{2}$.

Hinweis: Nähern Sie $\ln(P_{\text{bin}}(n; N, p))$ mit der Stirling-Formel für $n, N \gg 1$ und berechnen Sie dann die Taylorreihe von $\ln(P_{\text{bin}}(n; N, p))$ um $\frac{n}{N} = p$ zur führenden Ordnung.

*15. Harmonischer Oszillator

3+3+2 Points

Betrachten Sie ein System aus $N \gg 1$ ununterscheidbaren, eindimensionalen harmonischen Oszillatoren der Masse m und Frequenz ω . Der Hamiltonian von Oszillator i sei gegeben als $H(r_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2$. Im Folgenden wird die Boltzmann Entropie S_B als Funktion der mittleren Energie pro Oszillator ϵ im klassischen und quantenmechanischen Fall berechnet. Hierbei sei die Gesamtenergie $E = N\epsilon$ konstant.

- (a) Für die klassische Rechnung, sei ein Makrozustand durch die Teilchendichte im μ -Raum definiert. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsdichte $n(r, p)$ mittels der Methode der Lagrangemultiplikatoren. Berechnen Sie die Multiplikatoren dann explizit aus den Nebenbedingungen konstanter Teilchenzahl $N = \int d\Gamma n(r, p)$ und konstanter Energie $E = N\epsilon = \int d\Gamma H(r, p)n(r, p)$. Bestimmen Sie damit $S_B^{\text{cl}}(\epsilon)$.

Hinweis: Sie können das Resultat der Vorlesung $S_B^{\text{cl}} = -k_B \left[\int d\Gamma n(r, p) \ln(n(r, p)h) - n(r, p) \right]$ verwenden. Da hier die Maximierung bezüglich einer Funktion $n(r, p)$ erfolgen soll, ist analog zum diskreten Fall $\frac{\partial(S_B(n_\nu) + \text{N.B.})}{\partial n_\nu} = 0$ hier eine Nullstelle der Funktionalableitung $\frac{\delta[S_B + \text{N.B.}]}{\delta n(r, p)}$ zu bestimmen. Sie können dazu die folgende Regel für die Funktionalableitung verwenden

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int dx F[f(x)] = \frac{\partial F(f)}{\partial f} \Big|_{f=f(x)} .$$

- (b) Für die quantenmechanische Rechnung, verwenden Sie, dass die Eigenzustände des harmonischen Oszillators, $\hat{H}|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle$, die Energielevel $E_\nu = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ mit $\nu = 0, 1, 2, \dots$ besitzen. Ein Makrozustand sei dann über die Anzahl n_ν der Oszillatoren im Einteilchenzustand ν definiert. Bestimmen Sie die Besetzungszahlen n_ν im Gleichgewicht mittels der Methode der Lagrangemultiplikatoren. Berechnen Sie die Multiplikatoren dann explizit aus den Nebenbedingungen $N = \sum_\nu n_\nu$ und $E = N\epsilon = \sum_\nu E_\nu n_\nu$. Bestimmen Sie damit $S_B^{\text{qm}}(\epsilon)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mittels Stirling-Approximation, dass $S_B^{\text{qm}}(n_\nu) \approx \text{const.} - k_B \sum_\nu (n_\nu \ln(n_\nu) - n_\nu)$ gilt.

- (c) Vergleichen Sie die Resultate von (a) und (b) im Grenzfall großer und kleiner ϵ , sowie im klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$.