Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 2

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 29.10.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in der Übung am **Freitag, den 01.11.2024** besprochen.
*Bitte beachten Sie, dass wegen des Feiertags am 31.10.2024 die Übung für alle am Freitag stattfindet. Ausnahmsweise gibt es deshalb für diese Serie keine Punkte in den Seminaren und nur die * Aufgabe geht in die Wertung für die Klausurzulassung ein.*

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden:
https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

4. Energieschale

2+2 Punkte

Mit dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass bei einem System mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden die Oberfläche der Energieschale fast das gesamte Volumen des Phasenraums ausmacht.

In einem Behälter mit dem Volumen V befinden sich N nicht wechselwirkende Teilchen der Masse m. Die Energie dieses idealen Gases besteht ausschließlich aus kinetischer Energie. Jeder Punkt $\boldsymbol{X} = (q, p)$ des Phasenraums stellt einen Mikrozustand des Systems dar. Ein Makrozustand $M(E_1, E_2)$ entspricht der Menge aller Punkte im Phasenraum, für welche $E_1 \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{X}) \leq E_2$.

(a) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $|\Gamma(M(E_1, E_2))|$.

(b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen der Energieschale $M((1-\epsilon)E, E)$, wobei $0 < \epsilon < 1$. Welchen Anteil am gesamten Phasenraumvolumens der Kugel $M(0, E)$ hat diese Energieschale?

5. Ising-Spin System

2+2 Punkte

Mit den folgenden Aufgaben soll gezeigt werden, dass für ein System mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden, alle möglichen Mikrozustände im Gleichgewichtszustand und den kleinen Fluktuationen um ihn herum enthalten sind, mit einer verschwindend geringen Anzahl von Ausnahmen. Dies wiederum zeigt uns, dass das Ergodenprinzip keine notwendige Voraussetzung für die statistische Mechanik ist.

Eine große Klasse von physikalischen Systemen hat Freiheitsgrade, die nur zwei verschiedene Werte annehmen können. Als kanonisches Beispiel für diese Klasse betrachten wir das Ising-Modell mit dem Freiheitsgrad S, der die Werte $S = \pm 1$ annehmen kann. [1]

[1] Diese Freiheitsgrade können der Komponente z eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ entsprechen, da $S_z = \frac{\hbar S}{2}$. Ein anderes Beispiel sind Besetzungszahlen in einem beliebigen fermionischen System, da die Einzelteilchenzustände in diesem Fall, n, durch $n = \frac{1}{2}(1+S)$ gegeben sind.

Wir bezeichnen einen Mikrozustand des Ising-Systems mit $S_i = \pm 1$, wobei i die einzelnen Spins $i = 1, \ldots N$ zählt. Es gibt 2^N solche Zustände. Der Makrozustand ist definiert durch die Menge aller möglichen Zustände für einen gegebenen Gesamtspin $M = \sum_i S_i$. Ein Makrozustand mit Gesamtspin M hat $(N-M)/2$ Spins mit $S = -1$ und $(N+M)/2$ Spins mit $S = 1$ (wir betrachten hier nur den Fall, dass N gerade ist).

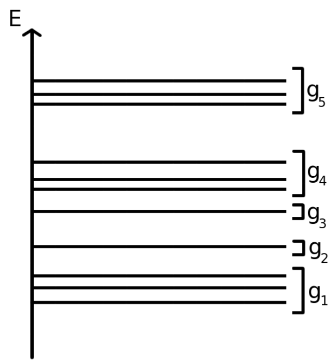
(a) Bestimmen Sie die Anzahl $W(M)$ der Mikrozustände für den Makrozustand mit Gesamtmagnetisierung M. Prüfen Sie, dass die Gesamtzahl der Mikrozustände $W_N = \sum_M W(M)$ gleich 2^N ist.

(b) Ermitteln Sie $W(M)$ im Limes $N \gg M \gg 1$ mit Hilfe der Stirling-Formel (Gaußverteilung).

*6. Bosonenverteilung

1+1+1+2 Points

Man betrachte ein System von nicht wechselwirkenden Bosonen, bei dem die Einteilchenzustände mit $\nu \geq 1$ bezeichnet werden und die Energie E_ν haben. Ein Mikrozustand des Systems ist dann eine Funktion der Besetzungszahlen aller Zustände $n_\nu \geq 0$.



Bei einer grobkörnigen Beschreibung verbinden sich quasi-entartete Einteilchenzustände zu einer Gruppe von $g_i \geq 1$ Zuständen zusammen, wie in der Abbildung gezeigt. Die Energien $\mathcal{E}_i$ und Besetzungszahlen N_i der Gruppen sind $\mathcal{E}_1 \approx E_1 \approx E_2 \approx \cdots \approx E_{g_1}$, $\mathcal{E}_2 \approx E_{g_1+1} \approx E_{g_1+2} \approx \cdots \approx E_{g_1+g_2}$, etc., und $N_1 = n_1 + n_2 + \ldots n_{g_1}$, $N_2 = n_{g_1+1} + n_{g_1+2} + \ldots n_{g_1+g_2}$, und so weiter. Ein Makrozustand M des Systems wird dann durch die Besetzungszahlen $\{N_i\}$ bestimmt.

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Mikrozustände $W(\{N_i\})$ des Makrozustands M.

Hinweis: Ein Teil dieses kombinatorischen Problems wurde bereits in Übungsblatt 1 Aufgabe 2 behandelt. Sie können annehmen, dass $N_i, g_i \gg 1$.

(b) Angenommen die Anzahl der Teilchen $N = \sum_i N_i$ und die Energie $E = \sum_i N_i \mathcal{E}_i$ sind beide gegeben. Finden Sie die Besetzungszahlen $\tilde{N}_i$ für den Makrozustand, bei dem die größte Anzahl von Mikrozuständen existiert.

Hinweis: Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, wie in den Vorlesungen besprochen, ist hier nützlich.

(c) Bestimmen Sie $W(\{\tilde{N}_i + \delta N_i\})$ als Funktion von $\delta N_i = N_i - \tilde{N}_i$ zur zweiten Ordnung in δN_i.

Entwickeln Sie $W(\{\tilde{N}_i + \delta N_i\})$ in δN_i.

(d) Wiederholen Sie (a)-(c) für Fermionen, deren Besetzungszahlen n_ν nur die Werte 0 oder 1 annehmen können.