Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 12

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 21.01.2025, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 23.01.2025** und **Freitag, 24.01.2025** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

*33. Ideale Fermionen bei niedrigen Temperaturen *4+2+1 Points*

Mittels der Sommerfeldentwicklung, zeigen Sie für ein ideales Fermigas bei niedrigen Temperaturen:

(a) Die innere Energie $E(T,N,V)$ zur Ordnung $\mathcal{O}(T^2)$ ist

$$E(T,N,V) = \frac{3\hbar^2}{10m}(6\pi^2)^{2/3}N\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} + \frac{3^{1/3}}{6}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}T^2N\left(\frac{N}{V}\right)^{-2/3} + \mathcal{O}(T^4)\ . \quad (1)$$

Hier ist m die Masse der Fermionen.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wie in der Vorlesung berechnet gilt, dass die Zustandsdichte für freie 3D Fermionen gegeben ist durch $N\rho(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2}\frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}$ und das chemische Potential gegeben ist als $\mu(T) = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right]$, wobei $\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$ die Fermienergie ist.

(b) Mit dem Ergebnis aus (a) zeigen sie, dass die spezifische Wärme $C_V(T,N,V)$ zur Ordnung $\mathcal{O}(T)$ gegeben ist durch

$$C_V = \frac{\pi^2}{3}\rho_F T + \mathcal{O}(T^2)\ , \quad (2)$$

wobei $\rho_F = \rho(\varepsilon_F)$.

(c) Mit dem Ergebnis aus (a) zeigen Sie, dass der Druck $p(T,N,V)$ für $T \to 0$ den Wert $\frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F$ annimmt.

34. Spezifische Wärme eines Festkörpers *4 Punkte*

Wir betrachten das Debye-Modell, welches den Beitrag von Gittervibrationen (Phononen) zur spezifischen Wärme eines Festkörpers beschreibt. In diesem Modell können Phononen (mit Bose-Statistik) mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Energie $\varepsilon_i(\boldsymbol{p}) = c_i|\boldsymbol{p}|$ betrachtet werden, wobei c_i die Schallgeschwindigkeit ist. In einem isotropen Festkörper gibt es für jeden möglichen Impuls eine longitudinale

Phononenmode (mit Schallgeschwindigkeit c_l) und zwei transversale Moden (mit Geschwindigkeit c_t). Der Phononenimpuls wird durch die Gitterkonstante a begrenzt, sodass die Obergrenze $|\boldsymbol{p}| \leq h/a$ ist.

Finden Sie die Temperaturabhängigkeit des Phononenbeitrags zur spezifischen Wärme C_V im Grenzfall niedriger Temperaturen ($T \ll T_D$) und hoher Temperaturen ($T \gg T_D$), wobei $T_D = h\bar{c}/ak_B$ die Debye-Temperatur ist und $\bar{c}$ die mittlere Schallgeschwindigkeit ist, definiert durch $3\bar{c}^{-3} = c_l^{-3} + 2c_t^{-3}$.

Hinweis: Für das Bosonengas können Sie zeigen, dass die innere Energie berechnet werden kann mittels $E = \sum_i g_i \int_0^{c_i h/a} \mathrm{d}\epsilon\, \rho_i(\epsilon)\epsilon n_B(\epsilon, T)$. *Hierbei ist die Summe über die Moden* $i \in \{l, t\}$ *mit* $g_l = 1$ *und* $g_t = 2$ *und* n_B *ist die Bose-Einstein Verteilung und* $\rho(\epsilon)$ *die Zustandsdichte für 3D Bosonen mit linearer Dispersion. Zur führenden Ordnung sollten sie* $c_V \propto \text{const.}$ *für* $T \gg T_D$ *und* $c_V \propto T^3$ *für* $T \ll T_D$ *finden.*

35. Pauli-Paramagnetismus *2+2 Punkte*

In einem externen Magnetfeld B unterscheiden sich die Einteilchenenergien $\epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma}$ der Leitungselektronen je nach Spinorientierung $\sigma = \pm$ (d.h. parallel oder antiparallel zum Feld):

$$\epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma} = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 - \sigma\mu_\mathrm{B}B.$$

wobei $\mu_\mathrm{B} = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ das Bohrsche Magneton ist. Für die beiden Spinorientierungen führt dies zu unterschiedlichen Besetzungszahlen $\langle n_{\boldsymbol{p},\sigma}\rangle$ bei gleichem chemischen Potential μ.
Die Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert als:

$$M = \mu_\mathrm{B} \cdot (\langle N_+\rangle - \langle N_-\rangle) \quad \text{mit} \quad N_\sigma = \sum_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p},\sigma}\,, \qquad \chi = \chi(T, B) = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{T,N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\chi(T, 0) = N\mu_\mathrm{B}^2 \int_0^\infty d\epsilon \rho'(\epsilon) n(\epsilon)$. Berechnen Sie die Suszeptibilität für $T = 0$. Dabei ist $\rho(\epsilon)$ die Zustandsdichte der Einteilchenzustände und $n(\epsilon)$ die Fermiverteilungsfunktion beim chemischen Potenzial μ.

(b) Entwickeln Sie $\chi(T, 0)$ unter Verwendung der Sommerfeldentwicklung bis einschließlich $O(T^2)$. Die Gesamtteilchenzahl N sei fixiert. Beachten Sie, dass μ temperaturabhängig ist. Berechnen Sie ein explizites Ergebnis für $\chi(T, 0)$ für die oben gegebene Dispersion.

Hinweis: Sie sollten finden, dass

$$\chi(T, 0) = \chi(0, 0)\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\epsilon_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right] .$$