Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 11

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 14.01.2025, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 16.01.2025** und **Freitag, 17.01.2025** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

*31. Bose Kondensation I

4+2+2+2 Points

Das großkanonische Potential des idealen Bose-Gases ist gegeben durch

$$J(T,\mu,V) = T\ln(1-z) - T\frac{V}{\lambda_T^3}\, g_{\frac{5}{2}}(z) \tag{1}$$

mit Fugazität $z = \mathrm{e}^{\mu/T}$, $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m T}$ und $g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} z^n$.

Hinweis: Sie können an geeigneten Stellen die folgende Entwicklung verwenden

$$\frac{g_{\frac{3}{2}}(z)}{g_{\frac{3}{2}}(1)} \approx 1 - 1.36\sqrt{1-z} + \mathcal{O}(1-z)\ .$$

(a) Berechnen Sie die Entropie S und die spezifische Wärmekapazität c_V über dem Kondensationspunkt (für $z < 1$) und für $z \to 1^-$.

Hinweis: Sie können das Ergebnis der Vorlesung verwenden, dass im thermodynamischen Limes $\ln(1-z)/V \to 0$. *In der Vorlesung wurde zudem gezeigt, dass für fixierte Dichte gilt, dass* $N = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)$ *für* $T > T_c$. *Zeigen Sie damit, dass*

$$S = N \begin{cases} \frac{5}{2}\frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \ln(z) & \textit{für } z < 1 \ (T > T_c) \\ \frac{5}{2}\frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) + \mathcal{O}((1-z)^{3/2}) & \textit{für } z \to 1^- \ (T < T_c)\ . \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass S stetig am Kondensationspunkt ist und die erste Ableitung von c_V nach der Temperatur dort einen Sprung hat. Hierbei ist $\zeta(x) = g_x(1)$ die Riemannsche Zeta-Funktion.

Hinweis: Für konstantes $v = V/N$ *können Sie aus* $N = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)$ *einen Ausdruck für* $\ln(z)$ *durch die Funktionen* $g_\nu(z)$ *finden. Für die spezifische Wärmekapazität sollten Sie in (b) erhalten haben, dass*

$$c_V = \frac{C_V}{N} = \begin{cases} \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & \textit{für } T > T_c \\ \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) & \textit{für } T < T_c\ . \end{cases}$$

(c) Der kritische Wert von $v = V/N$ ab dem die Kondensation beginnt ist

$$v_c(T) = \frac{\lambda_T^3}{\zeta(\frac{3}{2})} \ . \tag{2}$$

Berechnen Sie die isotherme Kompressibilität $\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\ |_T$ als Funktion von v für $v - v_c \ll v_c$ (nahe beim kritischen Punkt) und zeigen sie, dass κ_T bei v_c divergiert.

Wenn man den Bereich $v < v_c$ als eine neue Phase betrachtet (und nicht als eine Mischphase aus Kondensat und Gas in angeregten Zuständen), dann ist die Bose-Kondensation ein Phasenübergang zweiter Ordnung. Betrachtet man jedoch den Zustand, in dem alle Teilchen als vollständig im Kondensat befindlich angenommen werden (aufgrund des Fehlens von Abstoßung hat dieser Zustand ein spezifisches Volumen von $v = 0$), dann ist die Bose-Kondensation ein isothermer Phasenübergang erster Ordnung.

(d) Zeigen Sie, dass für den Druck

$$p(T) = \frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\hbar^3}(2\pi m)^{3/2}(k_B T)^{5/2} \tag{3}$$

mit partieller Kondensation bei $T_c(v)$ die Clausius-Clapeyron Gleichung erfüllt ist.

Hinweis: Zeigen Sie mit dem gegeben Ausdruck für p und Ihrem Ausdruck für S, dass

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l}{T\Delta v} \ \textit{mit latenter Wärme } \ell = T v_c \frac{s}{v} \ \textit{und } \Delta v = v_c \ .$$

32. Bose Kondensation II

2+2 Punkte

Für ein ideales Gas aus N Bosonen bei $T = T_c$ gilt

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \Psi_{3/2}(z) \tag{4}$$

$$z = \frac{\langle n_0 \rangle}{1 + \langle n_0 \rangle} \ , \tag{5}$$

wobei für $0 \leq \delta \ll 1$ in 3D folgende Entwicklung von $\Psi_{3/2}$ gilt

$$\Psi_{3/2}(1-\delta) = 1.36(1-\delta)\sqrt{-\ln(1-\delta)} + \delta + 0.38(1-\delta)\ln(1-\delta) + \mathcal{O}(\delta^2) \ . \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass für große Teilchenzahl N gilt

$$\langle n_0 \rangle \approx 1.22 N^{2/3} \ . \tag{7}$$

(b) Berechnen Sie $\langle n_\alpha \rangle$ für den angeregten Zustand α im Fall großer N. Wie verhält sich $\langle n_\alpha \rangle / N$ im Grenzwert $N \to \infty$?

Hinweis: Verwenden Sie die Relation zwischen $\langle n_\alpha \rangle$ und $\langle n_0 \rangle$, die in der Vorlesung hergeleitet wurde.