Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 10

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 07.01.2025, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 09.01.2025** und **Freitag, 10.01.2025** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden:
https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

28. Zwei-Komponenten Gas

2+2+2 Punkte

Wir betrachten ein Gas, welches aus zwei verschiedenen Teilchenarten besteht, die sich nur in ihrer Masse unterscheiden (wie zum Beispiel Isotope eines Atoms). Dabei haben N_1 Teilchen die Masse m_1 und N_2 Teilchen die Masse m_2. Alle Teilchen sind klassisch und nicht-wechselwirkend. Die Energiefunktion sei

$$H(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{p_i^2}{2m_1} + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} \frac{p_i^2}{2m_2} \ . \tag{1}$$

Das Gas habe Temperatur T und befindet sich im dreidimensionalen Volumen V.

(a) Zeigen Sie, dass die kanonische freie Energie gegeben ist durch

$$F(T,V,N_1,N_2) = -k_B T \sum_{i=1}^{2} N_i \left\{ \ln\left[\frac{4\pi}{h^3} \left(\frac{\pi}{2} (k_B T)^3 \right)^{\frac{1}{2}} V \right] - \ln(N_i) + 1 + \frac{3}{2}\ln(m_i) \right\} \ .$$

Verifizieren Sie die Homogenitätseigenschaft $F(T, \lambda V, \lambda N_1, \lambda N_2) = \lambda F(T, V, N_1, N_2)$.

(b) Die Gibbs freie Energie kann mittels Legrendre Transformation aus der freien Energie bezüglich der konjugierten Variablen p, V durch $G = F + pV$ erhalten werden. Führen Sie die Legendre Transformation durch und bestimmen Sie $G(T, p, N_1, N_2)$. Wie sieht die Homogenitätseigenschaft für G aus?

(c) Ausgehend von der Homogenitätseigenschaft für F, zeigen Sie die Gibbs-Duhem-Relation $G(T, p, N_1, N_2) = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$.

Hinweis: Starten Sie, indem Sie $F(T, \lambda V, \lambda N_1, \lambda N_2) = \lambda F(T, V, N_1, N_2)$ geeignet nach λ ableiten.

*29. 1D Gas aus verteilten Stäben *2+2+2 Points*

Wir betrachten ein Gas aus N klassischen Stäben der Länge ℓ in einem ein-dimensionalen Volumen $L \geq N\ell$. Das Wechselwirkungspotential zwischen den Stäben mit Massenmittelpunkt x_i und x_j sei gegeben durch

$$\Phi(x_i, x_j) = \begin{cases} \infty & \text{für } |x_i - x_j| \leq \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Die Stäbe können sich nicht überlappen und sie können nicht die Plätze wechseln.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_N^{(c)}$ und zeigen Sie, dass gilt

$$Z^{(c)}(N, L) = \frac{(L - N\ell)^N}{\Lambda^N} \ . \tag{3}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich die erlaubten Positionen der Stäbe. Starten Sie von Schwerpunktkoordinaten $x_1, ..., x_N$ und betrachten Sie $x_1 < x_2 < ... < x_N$ (berücksichtigen Sie diese Einschränkung durch einen kombinatorischen Faktor). Schreiben Sie die Zustandssumme als $Z_N^{(c)} = \frac{N!}{\Lambda^N}\mathcal{V}(N, L)$, wobei Λ^{-N} das Impulsintegral ist und $\mathcal{V}(N, L)$ ein Ortsintegral der Koordinaten $x_i \in \{\ell/2, L - \ell/2\}$ über ein Produkt von Indikatorfunktionen $\chi(x_{i-1}, x_i) = \begin{cases} 0 & |x_{i-1} - x_i| \leq \ell \\ 1 & sonst \end{cases}$. Dieses Integral kann explizit berechnet werden.

(b) Bestimmen Sie die Entropie $S(T, L, N)$ mittels des Ergebnisses aus (a).

(c) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung $p(T, L, N)$ des Systems. Wie sieht die Zustandsgleichung im thermodynamischen Limes $N, L \to \infty$ mit $n = N/L = \text{const.}$ aus?

30. Extremaleigenschaften des großkanonischen Potentials *5 Punkte*

Zeigen Sie, dass die großkanonische Verteilungsfunktion unter allen Verteilungsfunktionen mit gleicher Temperatur T und chemischem Potential μ das kleinste großkanonische Potential J besitzt. Das heißt

$$J' \geq J \text{ für } T' = T, \mu' = \mu \ . \tag{4}$$

Hinweis: Starten Sie von der Definition des großkanonischen Potentials $J = E - TS - \mu N$. Sei hier P_ν eine beliebige Verteilungsfunktion. Berechnen Sie $J' = E' - TS' - \mu N'$ für diese Funktion P_ν und zeigen Sie dass die Minimierung von J' nach P_ν die Verteilungsfunktion $\mathrm{e}^{-\beta(E_\nu - \mu N_\nu)}/Z^{(gc)}$ des großkanonischen Potentials liefert.