Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 1

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 22.10.2024, 12:00 Uhr** im Postfach „TP3: Statistische Physik" in ITP Raum 105b abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 24.10.2024** und **Freitag, 25.10.2024** besprochen.

Internet: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

*1. Poincaréscher Wiederkehrsatz *4 Points*

Diese Aufgabe soll zeigen, dass das Ergodentheorem keine zufriedenstellende Grundlage für die statistische Physik ist. Die Poincare-Wiederkehrzeit, die Sie erhalten sollten, ist selbst für eine relativ kleine Anzahl von Teilchen (d.h. um Größenordnungen kleiner als die Avogadro-Konstante) extrem groß.

In einem unregelmäßig geformten Kasten mit dem Volumen V befindet sich ein Gas aus N nicht wechselwirkenden Teilchen. Jedes Teilchen hat die Masse m und die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens ist v. Die Teilchen werden an den Wänden des Kastens elastisch in zufällige Richtungen gestreut, da die Wand unregelmäßig geformt ist. Der Kasten sei ein geschlossenes System, sodass die Gesamtenergie eine Konstante ist. Beachten Sie, dass dies das Volumen des Phasenraums einschränkt.

(a) Betrachten Sie zunächst ein einzelnes Teilchen an der Stelle $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ im Phasenraum. Da die Richtung der Reflexion an der Wand nicht bekannt ist, kennen wir auch nicht die genaue Position des Teilchens zu jedem Zeitpunkt. Schätzen Sie die Zeit, nach der das Teilchen bis auf eine Positions- und Impulsunsicherheit δq bzw. δp in seine Ausgangslage zurückkehrt. Quantifizieren Sie diese Schätzung für $V = 1\mathrm{cm}^3$, $\delta q = 10\text{Å}$, $\delta p = 10^{-2} mv$ und $v = 13 \times 10^4 \mathrm{cms}^{-1}$.

(b) Schätzen Sie die Zeit, nach der $N = 2.7 \times 10^{18}$ Teilchen jeweils zu ihren jeweiligen Ausgangspunkten zurückkehren.

(c) Schätzen Sie das Alter des Universums, um ein Gefühl für die Zeitspanne zu bekommen, die Sie in Teil (b) ermittelt haben.

Die in (a) verwendeten Werte sind konsistent mit Helium bei $0\,^\circ\mathrm{C}$.

2. Verteilungsfunktionen

4 Punkte

Es gibt verschiedene Arten von Verteilungsfunktionen, die z.B. von Anzahl und Art der Teilchen sowie von den möglichen Ergebnissen einer Messung abhängen. Im Folgenden werden wir einige dieser Funktionen explizit mit Hilfe der üblichen kombinatorischen Methoden ermitteln.

Betrachten Sie N Teilchen, die auf g Behälter verteilt sind. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen, die sich aus den folgenden Fällen ergeben:

(a) Die Teilchen sind unterscheidbar und jeder Behälter kann eine beliebige Anzahl von Teilchen aufnehmen.

(b) Die Teilchen sind unterscheidbar, aber jeder Behälter kann *höchstens* ein einziges Teilchen aufnehmen.

(c) Die Teilchen sind ununterscheidbar, und jeder Behälter kann eine beliebige Anzahl von Teilchen aufnehmen.

(d) Die Teilchen sind ununterscheidbar, aber in jeden Behälter passt höchstens ein einziges Teilchen.

Die in (c) und (d) erhaltenen Verteilungen entsprechen in der Quantenmechanik denen von Bosonen bzw. Fermionen.

3. Erhaltung des Phasenraumvolumens

4 Punkte

Mit dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass in der statistischen Mechanik der Hamiltonian die geeignete Funktion ist und nicht der Lagrangian.

Man betrachte ein Teilchen mit einer geschwindigkeitsabhängigen Masse $m = 2\mu|\dot{r}|^{\nu-2}$ in einem Potential $V(r)$. Es seien die Konstanten $\mu > 0$ und $\nu > 1$. Der Lagrangian des Teilchens ist somit

$$L(r, \dot{r}) = \mu|\dot{r}|^{\nu} - V(r).$$

(a) Leiten Sie den kanonischen Impuls p und den zugehörigen Hamiltonian H her und zeigen Sie, dass r und p in Bezug auf den Hamiltonian unabhängige Variablen sind. Überzeugen Sie sich davon, dass dies erfordert, dass $\frac{\partial}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial}{\partial p}\dot{p}$ im Allgemeinen Null ist. Aus den Vorlesungen wissen wir, dass dies wiederum die Bedingung dafür ist, dass das von r und p aufgespannte Volumen des Phasenraumes eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Leiten Sie nun aus L die Lagrange-Bewegungsgleichung ab. Zeigen Sie, dass $\ddot{r}$ eine Funktion sowohl von r als auch von $\dot{r}$ ist, die nun als unabhängige Variablen betrachtet werden sollen. Bestimmen Sie, ob $\frac{\partial}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\ddot{r}$ in diesem Fall verschwindet. Ist das von r und $\dot{r}$ aufgespannte Volumen in diesem Ensemble-Fluid erhalten?

Wir sehen an diesem Beispiel, dass im Allgemeinen der von (q, p) aufgespannte Phasenraum dem von $(q, \dot{q})$ vorzuziehen ist.