Experimentalphysik IV
Abzugeben am 13.04.2015

.

1. Übung

1.1

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in einem eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -a \qquad \text{(Bereich I)} \\ 0 & \text{für } |x| \leq a \qquad \text{(Bereich II)} \\ V_0 & \text{für } x > a \qquad \text{(Bereich III)} \end{cases} \tag{1}$$

mit $V_0 > 0$ bewegt. Untersuchen Sie die möglichen Energieeigenwerte für den Fall $0 < E < V_0$, indem Sie die eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung lösen.

a) Machen Sie für die Wellenfunktion in den einzelnen Bereichen den Ansatz:

$$\text{I:} \qquad \psi^{(1)}(x) = A^{(1)}e^{\kappa x} + B^{(1)}e^{-\kappa x} \tag{2}$$

$$\text{II:} \qquad \psi^{(2)}(x) = A^{(2)}e^{ikx} + B^{(2)}e^{-ikx} \tag{3}$$

$$\text{III:} \qquad \psi^{(3)}(x) = A^{(3)}e^{\kappa x} + B^{(3)}e^{-\kappa x} \tag{4}$$

Wie hängen k und κ mit der Energie E zusammen? Zeigen Sie, dass k und κ die Beziehung

$$k^2 + \kappa^2 = C^2 \tag{5}$$

erfüllen und geben Sie die von E unabhänginge Konstante C an.

b) Die sechs Koeffizienten $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ lassen sich durch folgende Überlegungen bestimmen:

   (1) Randbedingungen: Wegen der Normierbarkeit der Wellenfunktion müssen Sie fordern, dass diese für $x \to \pm\infty$ verschwindet. Was folgt daraus für $B^{(1)}$ und $A^{(3)}$?

   (2) Anschlussbedingungen: Aus der Forderung, dass die Wellenfunktion und deren Ableitung an den beiden Anschlussstellen stetig sind, erhalten Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{2)}$ und $B^{(3)}$. Zeigen Sie, dass nichttriviale Lösungen nur dann vorliegen, wenn entweder

$$\kappa = +k\tan(ka) \qquad \text{oder} \qquad \kappa = -\cot(ka) \tag{6}$$

   erfüllt ist. Bestimmen Sie in beiden Fällen die nichtriviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems. Diskutieren Sie die Symmetrie der Wellenfuntionen anhand einer Skizze.

   (3) Normierungsbedingen: Berechnen Sie den noch verbleibenden Koeffizienten aus der Normierungsbedingung für die Wellenfunktion.