Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 4

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 12.11.2024, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 14.11.2024** und **Freitag, 15.11.2024** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

10. Fluktuationen im idealen Gas

2+1+2 Punkte

Betrachten Sie ein ideales Gas aus Teilchen, die der Boltzmann-Statistik folgen. Analog zu Blatt 2 Aufgabe 6 seien Zellen mit i bezeichnet, deren Besetzungszahlen N_i um den wahrscheinlichsten Wert $\tilde{N}_i$ fluktuieren.

Hinweis: Sie können die Ergebnisse für die Boltzmann-Statistik aus der Vorlesung verwenden. Die Anzahl der Mikrozustände $W(\{N_i\})$ wurde dort hergeleitet als

$$W(\{N_i\}) = W(\{\tilde{N}_i\})\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_i \tilde{N}_i \left(\frac{\Delta N_i}{\tilde{N}_i}\right)^2 + \mathcal{O}(\Delta N_i^3)} .$$

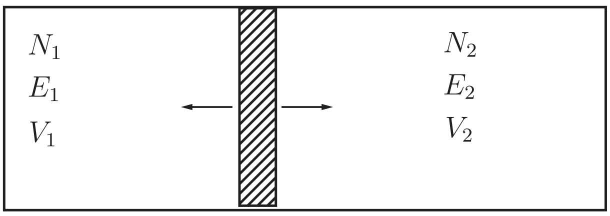
(a) Bestimmen sie die Änderung der Entropie für eine Änderung $\Delta N_i = N_i - \tilde{N}_i$ zur zweiten Ordnung in ΔN_i. Wieso verschwindet der lineare Term?

(b) Bestimmen Sie die mittlere Besetzung $\langle N_i \rangle$ in Zelle i.

(c) Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fluktuation $\langle \Delta N_i^2 \rangle$ mit Hilfe der Gaußischen Näherung aus der Vorlesung. Unter welchen Bedingungen sind diese Fluktuationen groß und wann sind sie klein?

11. Druckausgleich

4 Punkte



N Teilchen mit der Gesamtenergie E befinden sich in einem Behälter mit dem Volumen V. Der Behälter ist durch einen frei beweglichen Kolben in zwei Kammern unterteilt. Die Anzahl der Teilchen N_i in jedem Behälter ist konstant. Der Energietransfer E_i zwischen den Kammern ist durch den Kolben möglich. Das Volumen V_i der einzelnen Kammern kann durch die Bewegung des Kolbens variiert werden.

Zeigen Sie, dass im thermischen Gleichgewicht nicht nur die Temperatur sondern auch der Druck auf beiden Seiten gleich ist. Betrachten Sie dazu die Entropien in den Kammern $S_B^{(i)}(N_i, E_i, V_i)$.

*12. Projektionsoperatoren *1+1+1+1+1+1 Points*

In der quantenmechanischen Definition von Makrozuständen spielen Projektionsoperatoren $\hat{J}_M$ eine große Rolle (wie in den Vorlesungen gezeigt wurde). Der Eigenraum wird von den normierten Eigenvektoren $|X_\nu\rangle$ der Makrooperatoren aufgespannt (d.h. $\langle X_\mu | X_\nu \rangle = \delta_{\mu,\nu}$ und $\sum_\nu |X_\nu\rangle\langle X_\nu| = \mathbb{1}$). Die Makrozustände M werden definiert, indem diese Eigenvektoren zu Gruppen ($\nu \in M$) zusammengesetzt werden

$$\hat{J}_M := \sum_{\nu \in M} |X_\nu\rangle\langle X_\nu|.$$

Zeigen Sie, dass die $\hat{J}_M$ ein vollständige Menge von Projektionsoperatoren sind.

(a) $\sum_M \hat{J}_M = \mathbb{1}$

(b) $\hat{J}_M \hat{J}_{M'} = \delta_{M,M'} \hat{J}_M$

(c) Alle Eigenwerte von $\hat{J}_M$ sind entweder 0 oder 1.

Für Bosonen und Fermionen definieren wir die Symmetrisierungsoperatoren

$$\hat{J}_\pm = \frac{1}{N!} \sum_P (\pm 1)^P \hat{P}$$

mit Permutationsoperatoren $\hat{P}$. Zeigen Sie, dass

(d) $\hat{J}_\pm^2 = \hat{J}_\pm$

(e) $\hat{J}_+ \hat{J}_- = 0$

(f) $[\hat{J}_\pm, \hat{O}] = 0$ für jede Observable mit $[\hat{P}, \hat{O}] = 0 \;\; \forall P$.