Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
M. Thamm

TP 3: Statistische Physik - Übungsblatt 14

Winter Semester 2024/25

Due: Lösungen für die mit * markierten Aufgaben können bis **Dienstag, 04.02.2025, 12:00 Uhr** via Moodle abgegeben werden. Die Lösungen werden in den Übungen am **Donnerstag, 06.02.2025** und **Freitag, 07.02.2025** besprochen.

Website: Die Übungsblätter können von der Kurswebsite heruntergeladen werden: https://home.uni-leipzig.de/stp/Statistical.html_Physics_MPS_WS2425.html

Moodle: https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=50952

*39. Reales Gas

4+4+1 Bonus Points

Für ein reales Gas mit geringer Dichte kann die Zustandsgleichung durch die Dichte (Virialsatz) bestimmt werden. Zur niedrigsten Ordnung ergibt sich

$$pV = NT\left(1 + A(T)\frac{N}{V}\right) \;, \tag{1}$$

wobei $A(T)$ eine stetige Funktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität die folgende Form hat

$$C_V = \frac{3}{2}N - \frac{N^2}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}A(T)\right) \;. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass das Gas im Limes $V \to \infty$ ideal ist. Berechnen Sie dann $C_V(T, N, V)$ aus $C_V(T, N, \infty)$ und $(\partial C_V/\partial V)_{T,N}$.

(b) Berechnen Sie die Energie $E(T, N, V)$ und Entropie $S(T, N, V)$.

(c) Welchen Bedingungen muss die Funktion $A(T)$ erfüllen, damit das Gas stabil ist?

40. Van-der-Waals Gas

6 Bonus Punkte

Die Zustandsgleichung für das Van-der-Waals Gas in reduzierter Form lautet

$$\tilde{p}(\tilde{T}, \tilde{v}) = \frac{8\tilde{T}}{3\tilde{v} - 1} - \frac{3}{\tilde{v}^2} \;. \tag{3}$$

Erklären Sie, wie mittels Maxwell-Konstruktion die Grenzen $\tilde{v}_{1,2}(\tilde{T})$ des Zwei-Phasen-Gebiets in der Nähe des kritischen Punktes $\tilde{T} = 1$, $\tilde{v} = 1$ bestimmt werden können. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, aus dem die Grenzen $\tilde{v}_{1,2}(\tilde{T})$ erhalten werden können. Das System könnte numerisch gelöst werden, was jedoch für die Aufgabe nicht erforderlich ist.

41. Inverionskurve *6 Bonus Punkte*

Strömt ein Gas ohne Wärmeaustausch durch ein Drosselventil, bleibt die Enthalpie H konstant, aber im Allgemeinen ändern sich der Druck und die Temperatur. In den Vorlesungen wurde gezeigt, dass kleine Änderungen durch den Joule-Thomson-Koeffizienten $(\frac{\partial T}{\partial p})_H = \frac{1}{C_p}[T(\frac{\partial V}{\partial T})_p - V]$ beschrieben werden können.

Für das van der Waals-Gas mit der reduzierten Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{3}{v^2}\right)(3v - 1) = 8T \ ,$$

bestimmen Sie die Inversionskurve $p_i(T)$, bei der der Joule-Thomson-Koeffizient verschwindet, und zeigen Sie, dass die Inversionstemperatur $T_i = 27/4$ ist. Skizzieren Sie $p_i(T)$ und zeichnen Sie T_i ein.

Hinweis: Betrachten Sie $V(\frac{\partial T}{\partial V})_p = T$ und stellen Sie unter Hinzunahme der Zustandsgleichung ein Gleichungssystem auf. Nutzen Sie ein Computer-Algebra-System, um das Gleichungssystem nach $p_i(T)$ (und $v_i(T)$) zu lösen. Zeigen Sie so, dass $p_i(T) = 3(-9 + 8\sqrt{3T} - 4T)$. Die Inversionstemperatur ist dann die größte Temperatur für die $p_i(T) \geq 0$ ist.