

---

## Quantenmechanik - Übungsblatt 9

---

*Sommersemester 2016*

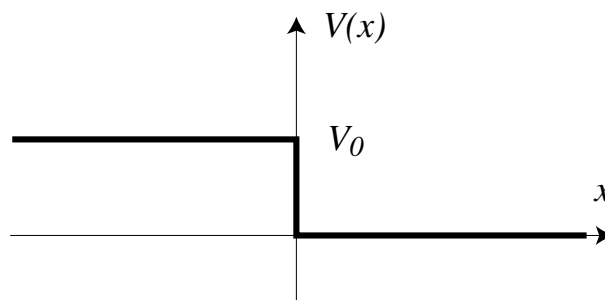
**Abgabe:** Mittwoch, den 08.06. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

### 32. Potentialstufe

*2+2 Punkte*

Ein Teilchen bewege sich im Potential einer eindimensionalen Potentialstufe an der Stelle  $x = 0$  der Höhe  $V_0$ , siehe Skizze.

- (i) Diskutieren Sie qualitativ die verschiedenen klassischen Trajektorien in den Bereichen  $x < 0$ ,  $x > 0$  für Energien  $0 < E < V_0$  und  $E > V_0 > 0$ .
- (ii) Das Teilchen laufe mit einer Energie  $E > V_0$  in Richtung positiver  $x$  die Stufe "abwärts". Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionsamplituden  $R$  und  $T$ . Welche Werte nehmen sie für  $E = V_0 + 0^+$  an?



### 33. Paritätsoperator

*2+2+2 Punkte*

Der Paritätsoperator  $\hat{P}$  ändert das Argument einer Ortsraumwellenfunktion  $\psi(x)$  eines 1-dimensionalen quantenmechanischen Systems von  $x$  zu  $-x$ , d.h.  $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ . Man spricht von geraden Funktionen für  $\psi(-x) = \psi(x)$  und ungeraden Funktionen wenn  $\psi(-x) = -\psi(x)$ .

- (i) Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator  $\hat{P}$  mit einem Hamilton-Operator  $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$  kommutiert, wenn das Potential  $V(x)$  symmetrisch bezüglich des Ursprungs bzw. gerade ist:  $V(x) = V(-x)$ .
- (ii) Zeigen Sie, ausgehend von der Rodriguez-Formel  $H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , für die Hermite-Polynome, dass die Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$  des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse  $m$  und Frequenz  $\omega$  Eigenfunktionen des Paritätsoperators sind, und geben Sie die Eigenwerte an.

- (iii) Zeigen Sie, dass der auf dem Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen über  $\mathbb{R}$  definierte Operator

$$\hat{\Pi} = \exp \left[ i\pi \left( \frac{1}{2\alpha} \hat{p}^2 + \frac{\alpha}{2\hbar^2} \hat{x}^2 - \frac{1}{2} \right) \right], \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

den Paritätsoperator darstellt. Dabei sind  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  Orts- und Impulsoperator.

**Hinweis:** Betrachten Sie  $\hat{\Pi}\psi(x)$  und entwickeln Sie  $\psi(x)$  nach den Funktionen eines geeignet gewählten vollständigen Orthonormalsystems.

### 34. Unitarität der Streumatrix

2+2+2 Punkte

Betrachten Sie ein Potential  $V(x)$  mit  $V(x) \equiv 0$  ausserhalb eines endlichen Intervalls  $I \subset \mathbb{R}$ . Die Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung links bzw. rechts des Intervalls  $I$  seien gegeben durch  $\psi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  bzw.  $\psi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$ . Zwischen den einlaufenden Amplituden  $A, D$  und den auslaufenden Amplituden  $B, C$  wird durch die sogenannte Streumatrix  $S$  der Zusammenhang

$$(1) \quad \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}}_{\equiv S} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

vermittelt.

- (i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten  $j_L$  und  $j_R$ .
- (ii) In der hier betrachteten stationären Situation gilt  $\dot{\rho}(x, t) = 0$ . Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(x, t) + \partial_x j(x, t) = 0$$

durch Integration  $\int_{\mathbb{R}} dx(\dots)$  und Ausnutzung der Randbedingung  $j(+\infty) = j_R$ ,  $j(-\infty) = j_L$  eine Gleichung für die Beträge der Amplituden  $A, B, C$  und  $D$  her. Eliminieren Sie mit Gl. (1) zwei der Amplituden.

- (iii) Leiten Sie nun durch Koeffizientenvergleich Bedingungen an die Elemente von  $S$  her, und benutzen Sie diese um zu zeigen, dass die Streumatrix  $S$  unitär ist, d.h.  $S^\dagger S = \mathbb{1}$ .