Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 7

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 25.05. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

25. Eichinvarianz von Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte *3 Punkte*

Zeigen Sie die Invarianz von Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$$

und Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\psi^*(\mathbf{r},t)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)\right\}$$

unter Eichtransformationen $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},\mathbf{t}) - \nabla\chi(\mathbf{r},\mathbf{t})$, $\psi'(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)\mathrm{e}^{(e/\mathrm{i}\hbar c)\chi(\mathbf{r},t)}$.

26. Bohr-Sommerfeld-Quantisierung *2 Punkte*

Berechnen Sie die Energieeigenwerte eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Schwingungsfrequenz ω mit Hilfe der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung

$$\oint p\,dq = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \ .$$

27. Erwartungswerte für den harmonischen Oszillator *4 Punkte*

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ im Zustand

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x) + \psi_2(x)\right) \ ,$$

wobei ψ_0 und ψ_2 die Wellenfunktionen für den Grundzustand und den zweiten angeregten Zustand des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators sind. Benutzen Sie dabei die Relationen

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^\dagger\psi_n(x) \ , \quad \psi_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}\psi_n(x) \ .$$

28. Rechnen mit Hermite-Polynomen

3+3 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die Hermite-Polynome

$$H_n(y) = (-1)^n \mathrm{e}^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} \mathrm{e}^{-y^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y \frac{d}{dy} + 2n \right) H_n(y) = 0. \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie weiterhin folgende Identität:

$$\frac{d}{dy} H_n(y) - 2n H_{n-1} = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie für (i) die Methode der vollständigen Induktion. Differenzieren Sie Gl. (1) nach y, um den Induktionsschritt von $k = n$ nach $k = n + 1$ zu vollziehen.