Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 6

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 18.05. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

20. Ehrenfest Theorem *4 Punkte*

Der Ehrenfestsche Satz über die Zeitentwicklung der Erwartungswerte von Operatoren liefert für den Ortsoperator die Beziehung

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \rangle \quad .$$

Damit der Erwartungswert $\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle$ tatsächlich der klassischen Bewegungsgleichung genügt, müßte man $\langle \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \rangle$ durch $\mathbf{F}(\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle)$ ersetzen können. Leiten Sie durch Taylorentwicklung der Kraft um den Erwartungswert $\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle$ ein Kriterium für die Gültigkeit dieser Ersetzung ab.

21. Baker–Hausdorff–Identität *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Baker-Hausdorff-Identität gilt:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \cdots ,$$

wobei $e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n$.

Hinweis: Zeigen Sie diese Identität, indem Sie $\hat{A}$ durch $\lambda\hat{A}$ ersetzen und die Gleichheit beider Seiten und ihrer Ableitungen nach λ für $\lambda = 0$ nachweisen.

22. Unabhängigkeit von der Darstellung *3 Punkte*

Berechnen Sie explizit den Kommutator $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$ in Orts- und Impulsdarstellung! Dabei bezeichnen $\hat{x}_i$ bzw. $\hat{p}_j$ die Komponenten der vektorwertigen Operatoren $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$.

23. Heisenbergsche Unschärferelation *5 Punkte*

Gegeben seien zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und ein beliebiger Zustand ψ. Zeigen Sie die allgemeine Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta\hat{A})(\Delta\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle| \,,$$

wobei $\langle \hat{A} \rangle \equiv (\psi, \hat{A}\psi)$.

Hinweis: Für das Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|(\phi, \psi)|^2 \leq (\phi, \phi)(\psi, \psi) \, .$$

Die Unschärfe $\Delta\hat{A}$ ist als positive Quadratwurzel des Schwankungsquadrates

$$(\Delta\hat{A})^2 = (\psi, (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\psi)$$

definiert. Wenden Sie die Schwarzsche Ungleichung auf das Skalarprodukt $(\tilde{A}\psi, \tilde{B}\psi)$ an, wobei $\tilde{X} := \hat{X} - \langle\hat{X}\rangle$. Zerlegen Sie dann mittels des Antikommutators $\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A}$ das Produkt $\tilde{A}\tilde{B}$ in einen hermiteschen und einen antihermiteschen Anteil:

$$\tilde{A}\tilde{B} = \frac{1}{2}\{\tilde{A}, \tilde{B}\} + \frac{1}{2}[\tilde{A}, \tilde{B}] \, .$$

Diese Zerlegung bedeutet für den Mittelwert eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil.

24. Eichtransformation

1+1 Bonus Punkte

Betrachten Sie die zwei Vektorpotentiale

$$\mathbf{A_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Magnetfelder $\mathbf{B_1} = \nabla \times \mathbf{A_1}$ und $\mathbf{B_2} = \nabla \times \mathbf{A_2}$.

(ii) Finden Sie eine Funktion χ, sodass die Eichtransformation $\mathbf{A_1} = \mathbf{A_2} - \nabla\chi$ erfüllt ist.