Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 5

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 11.05. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

16. Stationäre Zustände *4 Punkte*

Stationäre Lösungen der Schrödingergleichung haben die Form (wobei wir der Einfachheit halber den 1-dimensionalen Fall betrachten)

$$\psi(x,t) = \phi(x) \cdot \chi(t) \ .$$

Zeigen Sie, daß für solche Lösungen sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ als auch die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ zeitlich konstant sind! Dabei sind

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t), \quad j(x,t) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right)\psi(x,t)\right] .$$

Hinweis: Leiten Sie dazu zunächst aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t),$$

eine Bestimmungsgleichung für $\chi(t)$ her.

17. Adjungierte Operatoren *1+1 Punkte*

$\hat{A}^\dagger$ heißt zu $\hat{A}$ adjungierter Operator, wenn $(\hat{A}^\dagger\phi, \psi) = (\phi, \hat{A}\psi)$ für alle Wellenfunktionen $\psi \in D(\hat{A})$ und $\phi \in D(\hat{A}^\dagger)$, mit $D(\hat{A})$ und $D(\hat{A}^\dagger)$ den Definitionsbereichen der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$. Zeigen Sie:

(i) $(c\hat{A})^\dagger = c^*\hat{A}^\dagger$ für alle Operatoren $\hat{A}$ und Zahlen $c \in \mathbb{C}$.

(ii) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ für alle Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$.

18. Drehimpulsoperator *2 Punkte*

Der Drehimpulsoperator ist definiert durch $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ mit dem Orts- und Impulsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$. Zeigen Sie, daß für seine Komponenten $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$ gilt, wobei ϵ der total antisymmetrische Tensor ist. Benutzen Sie dazu die Kommutatorrelationen $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ für die Komponenten $\hat{r}_i, \hat{p}_j$, mit $i, j \in \{x, y, z\}$ von Orts- und Impulsoperator in drei Raumdimensionen.

Hinweis: Es gilt $\epsilon_{kij}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.

19. Kommutatoren

2+2+2+2 Punkte

Da Operatoren im allgemeinen nicht vertauscht werden können, ist es nützlich, für Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ den Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ zu definieren. Häufig taucht auch der sogenannte Antikommutator auf, definiert durch $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.
Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ beliebige Operatoren, $\hat{x}$ und $\hat{p}$ Orts- und Impulsoperator. Zeigen Sie in der angegebenen Reihenfolge:

(i) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

(ii) Sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ selbstadjungiert, so sind auch die Operatoren $\mathrm{i}[\hat{A}, \hat{B}]$ sowie $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ selbstadjungiert. (Achtung, $\hat{A}\hat{B}$ ist im allgemeinen nicht selbstadjungiert.)

(iii) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$, falls $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

(iv) $[\hat{p}, f(\hat{x})] = -\mathrm{i}\hbar f'(\hat{x})$.

Nehmen Sie dabei an, daß die Funktion $f(x)$ als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ darstellbar ist, und nutzen sie die Kommutatorrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$.