Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 4

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 04.05. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

13. Gauss-Verteilung

1+1+2+2 Punkte

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ sei eine Gauss-Verteilung gegeben:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,\, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Gehen Sie nun wie folgt vor:

(i) Überzeugen Sie sich für die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Normierung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) = 1$.

(ii) Berechnen Sie für die Gauss-Verteilung $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und bestimmen Sie damit $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

(iii) Zeigen Sie für eine Verteilung $p(x)$, für welche $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ existieren, dass $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Hierbei ist $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ mit $\Delta x = x - \langle x \rangle$. Berechnen Sie für die Gauss-Verteilung σ^2 ohne Ausnutzung der eben gezeigten Beziehung.

(iv) Überzeugen Sie sich davon, dass für eine symmetrische Verteilung, d.h. $p(x) = p(-x)$, alle Erwartungswerte $\langle x^n \rangle$, mit $n \in \mathbb{N}$, n ungerade verschwinden.

Hinweis: Erwartungswerte von Funktionen $f(x)$ sind durch $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) f(x)$ definiert. Machen Sie weiterhin vom folgenden Integral gebrauch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{-z^2} = \sqrt{\pi}.$$

14. Detektorstatistik

1+1+2+2 Punkte

Wir betrachten eine 1-dimensionale Anordnung von Detektoren, wie in Abbildung 1 dargestellt. Dabei falle aus der y-Richtung ein Teilchenstrahl aus einem experimentellen Aufbau auf die Detektoren, mit denen sich die Position eines einfallenden Teilchens in x-Richtung mit der durch die Detektoranordnung gegebenen Auflösung bestimmen lässt. Die Detektorpositionen sind dabei gegeben durch $x_i = i\,l$, $i = 1, \ldots, 10$ und l dem Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier Detektoren. Die Ergebnisse einer Messung sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Der Mittelwert einer Funktion $f(x)$ der Koordinate x ist definiert durch $\overline{f(x)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} n_i f(x_i)$, mit n_i der Anzahl der Detektorklicks bei Position x_i und N der Gesamtzahl der Detektorklicks.

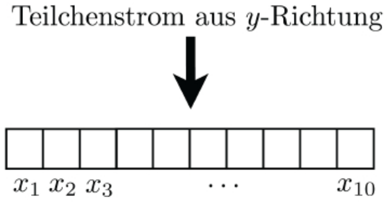

Abbildung 1: Darstellung der Detektoranordnung entlang der x-Achse. Die Position eines Teilchens das auf den i-ten Detektor fällt wird mit x_i identifiziert.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
n_i	0	8	9	18	31	14	14	4	2	0

Tabelle 1: Anzahl n_i der jeweiligen Detektorklicks im gegebenen Zeitintervall des Experiments.

(i) Berechnen Sie $\overline{x}$ und $\overline{x^2}$.

(ii) Ermitteln Sie die Abweichung $\Delta x = x - \overline{x}$ für $i = 1, \ldots, 10$.

(iii) Berechnen Sie mit Ihren Ergebnissen für die Δx die Standardabweichung σ aus der Varianz (das Quadrat der Standardabweichung), $\sigma^2 = \overline{\Delta x^2}$. Berechnen Sie nun mit Ihren Ergebnissen für $\overline{x^2}$ und $\overline{x}^2$ den Wert $\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$. Ist $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$ erfüllt?

(iv) Bestimmen Sie eine auf den x_i definierte Wellenfunktion $\psi(x_i)$, so dass $\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{10} |\psi(x_i)|^2 f(x_i) = \overline{f(x)}$ gilt.

15. Verteilungen, Momente und Kumulanten *2+2+2 Punkte*

Wir betrachten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Das n-te Moment μ_n ($n \in \mathbb{N}$) der Verteilung ist definiert durch $\mu_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n p(x)$. Die sogenannte *charakteristische Funktion* der Verteilung ist über Fourier-Transformation definiert:

$$\chi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} p(x) = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathrm{i})^n \mu_n\, k^n. \tag{1}$$

Die sogenannten *Kumulanten*, C_n, einer Verteilung sind durch den Logarithmus der charakteristischen Funktion definiert: $\ln \chi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}k)^n}{n!} C_n$. Es lässt sich zeigen, dass die Kumulanten durch die Momente der Verteilung ausgedrückt werden können. Es gilt für die ersten drei Kumulanten:

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_1, \\ C_2 &= \mu_2 - \mu_1^2, \\ C_3 &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3. \end{aligned}$$

(i) Verifizieren Sie die Darstellung in der zweiten Zeile von Gl. (1) durch eine Taylor-Entwicklung von $\chi(k)$ um $k = 0$.

Hinweis: Schreiben Sie hierzu die Exponentialreihe aus und nehmen Sie an, dass Summation und Integration für hinreichend gutartige $p(x)$ vertauschen.

(ii) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\chi(k)$ für eine Gauss-Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

(iii) Leiten Sie die obigen Darstellungen von C_1 und C_2 aus Ihrem Ergebnis für $\chi(k)$ her.

Bemerkung: Die obigen Definitionen übertragen sich auf Zufallsvariablen mit diskretem Wertebereich $x \in \{x_1, x_2, \dots\}$. Diese lassen sich durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p(x) = p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2) + \dots$, mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ darstellen.