Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 3

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 27.04. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

9. Klein–Gordon–Gleichung

4 Punkte

Die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen kann aus der nichtrelativistischen Energie–Impuls–Beziehung $E = \frac{p^2}{2m_0}$, $p = |\mathbf{p}|$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, durch die Ersetzung

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla$$

gewonnen werden. Leiten Sie auf analoge Weise – siehe Vorlesung – eine Wellengleichung aus der relativistischen Energie–Impuls–Beziehung ab (Klein–Gordon–Gleichung).

Machen Sie für die relativistische Wellenfunktion $\Phi(\mathbf{r}, t)$ den Ansatz $\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar}t}\Psi(\mathbf{r}, t)$, mit m_0 der Ruhemasse des Teilchens. Leiten Sie damit für ein langsam bewegtes Teilchen die Wellengleichung für $\Psi(\mathbf{r}, t)$ in führender Ordnung in E_{kin}/E_0 ab, wobei die Ruheenergie als $E_0 = m_0 c^2$ gegeben ist. Zeigen Sie somit, dass die Schrödinger-Gleichung sich im Grenzfall niedriger kinetischer Energie ergibt.

10. Zur Schrödinger-Gleichung

3 Punkte

Die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ eines Teilchens in einem Potential $V(\mathbf{r})$ genügt der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}, t).$$

Zeigen Sie, daß die Lösung der Schrödinger-Gleichung im allgemeinen *nicht* einfach durch $\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\tilde{\psi}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-Et/\hbar)}$ mit der "Energie" $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierbei ist $k = |\mathbf{k}|$.

11. Orts-Impulsunschärfe

2+2+2 Punkte

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante N für die Impulsraum-Wellenfunktion $f(k) = N/(k^2 + \alpha^2)$, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 dk = 1$.

(b) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} dk$.

(c) Skizzieren Sie $f(k)$ und $\psi(x)$, und zeigen Sie, dass $\Delta k\Delta x \gtrsim 1$, unabhängig von der Wahl von α.

12. Quarkonium *5 Punkte*

Ein Quark, der elementare Bestandteil eines Protons oder Neutrons, wechselwirkt mit seinem Antiteilchen, dem Antiquark über ein Potential, das in guter Näherung als linear angenommen werden kann. Es hat also die Form

$$V(r) = Fr,$$

wobei r ($r \geq 0$) der Abstand zwischen Quark und Antiquark ist. Die Dynamik der Relativkoordinate r ist unter Verwendung der reduzierten Masse m_r äquivalent zum *eindimensionalen Problem* eines Balles im Gravitationsfeld, der elastisch am Erdboden ($r = 0$) reflektiert wird.
Das Quark-Antiquark System bildet gebundene Zustände und wird *Quarkonium* genannt. Wenden Sie die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung an, um die diskreten Energien des Quarkoniums zu berechnen. Nach der Bohr–Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung muß für einen stationären Zustand (mit p als kanonischem Impuls und q der zugehörigen generalisierten Koordinate des Systems)

$$\oint p\,dq = 2\pi\hbar(n + \gamma)$$

gelten. In unserem Problem ist für den *Maslow-Index* $\gamma = \frac{3}{4}$ zu wählen.

a) Nehmen Sie eine nicht-relativistische Energie-Impuls Beziehung an und berechnen Sie die quantisierten Energien nach Bohr-Sommerfeld. Wo liegen die klassischen Umkehrpunkte?

b) Experimentell kann die Rückstellkraft F abgeschätzt werden zu $F \simeq 1\,\mathrm{GeV/fm}$, die reduzierte Masse des Quark-Antiquark Systems zu $500\,\mathrm{MeV}$. Berechnen Sie hiermit den Energieabstand zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Niveau. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Messwert von etwa $500\,\mathrm{MeV}$.
Beachten Sie: $1\,\mathrm{fm}$ (Femtometer) $= 10^{-15}\,\mathrm{m}$; Massen werden in der Elementarteilchenphysik gerne in Energieeinheiten angegeben, die Umrechnung in kg ist nicht schwer.