Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 2

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 20.04. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

5. Diracsche Delta-Funktion

1+1+1+1+1 Punkte

Die Diracsche Delta-Funktion kann wie folgt durch eine Funktionenschar dargestellt werden als

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} a} e^{-x^2/a^2}, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x) = 1$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x) f(x) = f(0)$

(iii) $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), \quad c \neq 0$

(iv) $x\delta(x) = 0$

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta'(x) f(x) = -f'(0)$

Hinweis: Die Deltafunktion ist immer als Faktor innerhalb eines Integrals wie in (i) zu verstehen, wobei $\lim_{a\to 0}$ nach der Integration auszuführen ist! Verwenden Sie für Ihre Beweisführung *nur* das vollständige Gauss-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

sowie die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \cdots .$$

6. Inverse Fourier-Transformation

3+2 Punkte

Die Darstellung der Delta-Funktion als Fourier-Transformierte der '1',

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

soll durch Auswertung des Grenzwerts $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} dk \, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}kx - \epsilon k^2)}$, $\epsilon > 0$ gezeigt werden.

(a) Führen Sie hierzu obiges Integral mittels quadratischer Ergänzung für $\epsilon > 0$ aus und bringen Sie das Ergebnis in die Form der Darstellung der Delta-Funktion aus Aufgabe 5., siehe oben.

(b) Zeigen Sie damit, dass eine Fourier-Transformation $\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)$ durch $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k)$ invertiert wird.

7. Wellenpakete

4 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket eines Teilchens der Masse m im Laufe der Zeit zerfließt. Wenn ein solches Wellenpaket im Impulsraum anfangs $(t = 0)$ die Form $\psi(k) = \mathcal{N} \exp(-(k - k_0)^2 b^2/2)$ mit einer Normierungskonstanten $\mathcal{N}$, einem mittleren Impuls $\hbar k_0$ und einer Ortsunschärfe b besitzt, gilt für die zeitliche Entwicklung der Ortsunschärfe

$$(\Delta x)^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{t^2\hbar^2}{m^2 b^4}\right).$$

Wie lange dauert es für ein Elektron ($m \approx 10^{-27}$g), ein C_{60} Molekül ($m \approx 10^{-21}$g) und eine Schrotkugel ($m \approx 1$g), bis sich das anfängliche Schwankungsquadrat der Ortsunschärfe verdoppelt hat? Dabei sei die Ortsunschärfe anfänglich jeweils etwa ein Atomabstand, $b \approx 10^{-8}$cm.
Ein Elektron in einem Elektronenmikroskop habe eine Geschwindigkeit $v \approx 10^8$m/s und eine abgefeuerte Schrotkugel $v \approx 10^3$m/s. Wie groß sind die zugehörigen de Broglie Wellenlängen?

8. Unschärferelation

4 Punkte

Es gelingt bekanntlich niemandem, einen gut gespitzten Zahnstocher auf harter Unterlage ohne Hilfsmittel so senkrecht auszubalancieren, daß er auf der Spitze stehen bleibt. Liegt das am Ungeschick oder an der Unschärfe? Wie lange dauert es z.B. maximal, bis die quantenmechanischen Unschärfen von Einstellwinkel und Drehimpuls um die Spitze zu einer Neigung von 1^o gegen die Senkrechte führen? Das Ergebnis ist verblüffend. Kann man daraus wirklich schließen, die Unschärferelation spiele hier praktisch eine Rolle?

Hinweis: Lösen Sie für die "quantenmechanische" Betrachtung die klassische Bewegungsgleichung und verwenden Sie die Unschärferelation zur Bestimmung des anfänglichen Drehimpulses l_0 aus der anfänglichen Auslenkung φ_0. Anschließend die Anfangsauslenkung φ_0 so wählen, daß die Fallzeit maximal wird. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für groše Zeiten durch ihren asymptotischen Verlauf annähern. Für die klassiche Betrachtung müssen Sie die Anfgangsbedingungen geeignet abschätzen.