Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 12

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 29.06. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

44. Unitäre Tranformationen *1+2 Punkte*

Betrachten Sie die unitäre Transformation $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass das resultierende Transformationverhalten eines Operators $\hat{A}$ durch $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie dann, dass die folgenden Eigenschaften von linearen Operatoren unter unitären Transformationen erhalten bleiben bzw. wie diese modifiziert werden:

(i) Linearität und Hermitezität,

(ii) Kommutatorrelationen,

(iii) Spektrum,

(iv) Addition und Multiplikation, also $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$ bzw. $\hat{C}_2 = \hat{A}\hat{B}$.

45. Heisenberg-Bild der Zeitentwicklung *2+2+2 Punkte*

Betrachten Sie den quantenmechanischen, 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω_0.

(a) Bestimmen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen des Orts- und Impulsoperators sowie der Erzeuger- und Vernichteroperatoren.

(b) Lösen sie die Bewegungsgleichungen, die sie in Teil (a) bestimmt haben.

(c) Die allgemeine Zeitabhängigkeit von Operatoren wird im Heisenberg-Bild durch die mit der Zeit t parametrisierte unitäre Transformation

$$\hat{A}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

beschrieben, mit $\hat{H}$ dem Hamilton-Operator. Berechnen Sie mittels der Baker–Hausdorff Identität die Zeitabhängigkeit des Ortsoperators.

46. Impulsdarstellung

2+2 Punkte

Seien $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ beliebige Ket-Vektoren. Nehmen Sie als Ausgangspunkt die Normierung $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ sowie die Vollständigkeitsrelation $\int dx|x\rangle\langle x| = \hat{\mathbb{1}}$ an, und leiten Sie daraus als Vorbereitung einen Ausdruck für $\langle x|p\rangle$ ab. Zeigen Sie dann ausführlich, dass

(i) $\langle p|\hat{x}|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi_\alpha(p)$,

(ii) $\langle\beta|\hat{x}|\alpha\rangle = \int dp\ \psi_\beta^*(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi_\alpha(p)$.

Dabei sind $\psi_\alpha(p) \equiv \langle p|\alpha\rangle$ und $\psi_\beta(p) \equiv \langle p|\beta\rangle$ Wellenfunktionen in einer Dimension in Impulsdarstellung und $\hat{x}$ ist der Ortsoperator.

47. 2-Niveau Systeme II

2+1+1+1 Punkte

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, dessen Hamilton-Operator $\hat{H}$ die Eigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ besitzt:

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle, \qquad \hat{H}|1\rangle = E_1|1\rangle.$$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sei eine Orthonormalbasis eines zweidimensionales Hilbertraums, so dass ein beliebiger Vektor $|\psi\rangle$ des Hilbertraumes geschrieben werden kann als

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(a) Berechnen Sie $\langle\psi|\psi\rangle$, schreiben Sie $\hat{H}$ in Spektraldarstellung und berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\hat{H}$ im Zustand $|\psi\rangle$.

Hinweis: Die Spektraldarstellung eines Operator $\hat{H}$ mit orthonormalen Eigenvektoren $\{|e_n\rangle\}$ und Eigenwerten $\{\lambda_n\}$ ist definiert als

$$\hat{H} = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|.$$

(b) Die Operatoren $\hat{R}$ und $\hat{L}$ seien definiert als

$$\hat{R} = |1\rangle\langle 0|, \qquad \hat{L} = |0\rangle\langle 1|.$$

Berechnen Sie die Wirkung dieser Operatoren auf die Basiszustände und den beliebigen Zustand $|\psi\rangle$.

(c) Berechnen Sie $\hat{R}\hat{R}$ und $\hat{L}\hat{L}$. Welche Eigenschaften haben die Operatoren $\hat{R}\hat{L}$ und $\hat{L}\hat{R}$?

(d) Drücken Sie den Hamilton-Operator durch die Operatoren $\hat{R}$ und $\hat{L}$ sowie die Eigenwerte E_0 und E_1 aus.