Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 11

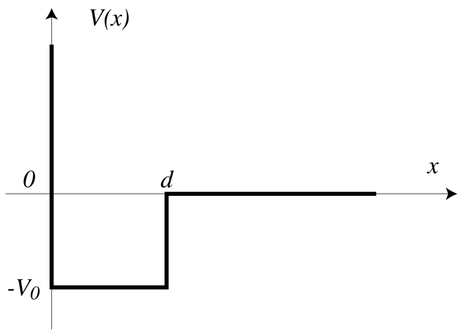
Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 22.06. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

39. Potentialtopf mit Wand

1+1+1+1+1 Punkte

Ein Teilchen bewege sich in einem 1-dimensionalen Potentialtopf der Breite d und Tiefe V_0 mit einer harten Wand. (Für $x \leq 0$ sei $V(x) = \infty$.)



(i) Machen Sie für $-V_0 < E < 0$ einen Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$. Bauen Sie dabei ein, dass das unendlich hohe Potential für $x \leq 0$ die Bedingung $\psi(0) = 0$ erzwingt.

(ii) Schreiben Sie die Bedingungen explizit auf, die $\psi(x)$ bei $x = d$ erfüllen muss, und leiten Sie aus diesen Bedingungen die Quantisierungsbedingung

$$\tan(Kd) = -K/\kappa$$

für die Energie her, wobei K die Wellenzahl im Bereich $0 \leq x \leq d$ ist und κ den exponentiellen Abfall im Bereich $x \geq d$ beschreibt.

(iii) Skizzieren Sie die beiden Seiten der Quantisierungsbedingung als Funktion von Kd und beachten Sie dabei, dass κ von K abhängt.

(iv) Welche Bedingung müssen d und V_0 erfüllen, damit es überhaupt einen gebundenen Zustand gibt?

(v) Bestimmen Sie für sehr tiefe Töpfe durch eine geeignete Näherung die Grundzustandsenergie.

40. Dreidimensionaler Potentialtopf

2+1+1 Punkte

Gegeben ist nun ein dreidimensionaler Potentialtopf mit $V(\mathbf{r}) = -V_0\ \theta(a - |\mathbf{r}|)$, $V_0 > 0$.

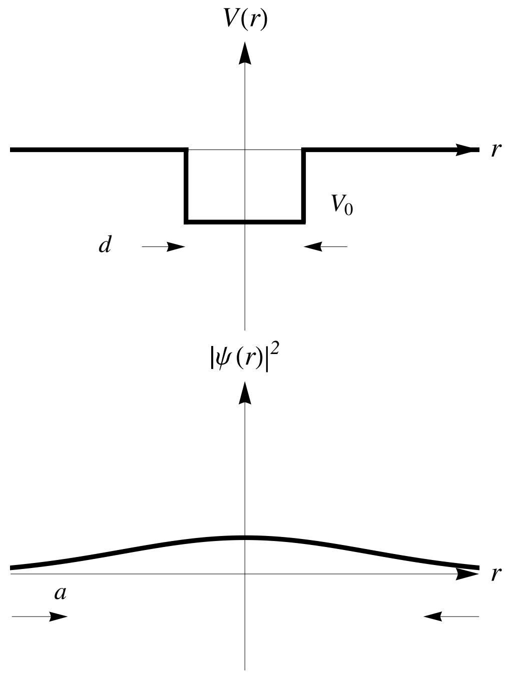
(i) Lösen Sie die Schrödingergleichung für Drehimpuls $l = 0$ für gebundene Zustände in den Bereichen $0 < r < a$ und $r > a$.

(ii) Gewinnen Sie dann aus den Anschlußbedingungen bei $r = a$ eine Bestimmungsgleichung für die Energie gebundener Zustände.

(iii) Lösen Sie die Gleichung graphisch und formulieren Sie eine Bedingung für die Existenz eines gebundenen Zustands.

41. Schwach gebundene Zustände *4 Punkte*

Ein Teilchen bewege sich in einem D-dimensionalen rotationssymmetrischen Potentialtopf der Breite d und Tiefe V_0, siehe nebenstehende Abbildung (oben). In dieser Aufgabe soll untersucht werden, ob ein beliebig flacher Topf in der Lage ist, das Teilchen im Grundzustand zu binden.



Für flache Töpfe kann man annehmen, dass die Wellenfunktion eine Breite $a \gg d$ besitzt, siehe Abbildung (unten). Schätzen Sie die kinetische und potentielle Energie des Zustands unter Berücksichtigung der Heisenbergschen Unschärferelation ab und minimieren Sie die Energie. In welchen D wird das Teilchen durch einen beliebig flachen Topf gebunden?

42. Flacher 2-dimensionaler Potentialtopf *4 Bonus Punkte*

Betrachten Sie einen 2-dimensionalen, rotationssymmetrischen Potentialtopf mit $V(\mathbf{r}) = -V_0\,\theta(a - |\mathbf{r}|)$, $V_0 > 0$. Der radiale Anteil des Laplace-Operators in zwei Dimensionen ist gegeben durch $\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})$. Suchen Sie nach einem gebundenen Zustand mit Drehimpuls $l = 0$.

(a) Nehmen Sie dazu an, dass die Wellenfunktion innerhalb des Potentialtopfes annähernd konstant ist und dass $|E| \ll V_0$. Bestimmen Sie $\int_0^a r\Delta_r R(r)dr$ aus der radialen Schrödinger-Gleichung und ermitteln Sie daraus die logarithmische Ableitung der radialen Wellenfunktion am Rand des Topfes.

(b) Lösen Sie die radiale Schrödinger-Gleichung in der Form $r^2\Delta_r R = r^2\kappa^2 R$ für $\kappa a < \kappa r \ll 1$ mit $\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ und berechnen Sie die Bindungsenergie mit dem Resultat für die logarithmische Ableitung der radialen Wellenfunktion aus Teil (a).

Hinweis: In Teil (b) kann nach der Substitution $s = \kappa r$ einer der Terme der radialen Schrödinger-Gleichung vernachlässigt werden.

43. 2-Niveau Systeme *3 Punkte*

Der Hamilton-Operator eines 2-Niveau Systems kann in der Basis der Pauli-Matrizen geschrieben werden als

$$\hat{H} = \epsilon\sigma^z + \Delta_1\sigma^x + \Delta_2\sigma^y,$$

wobei $\epsilon, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren für dieses System.