Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 10

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 15.06. vor 11:00 Uhr, Briefkasten in der Brüderstr. 16.

35. Rotationsinvarianz des Hamiltonians *2 Punkte*

Ein physikalisches System sei definiert durch einen Hamiltonoperator $\hat{H}$. Zeigen Sie, daß das Problem genau dann kugelsymmetrisch ist, wenn $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0$ gilt.

36. Drehimpulsoperator *1+1 Punkte*

Beweisen Sie die folgenden Relationen für Drehimpulsoperatoren ausgehend von der Drehimpuls-Algebra $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$:

(a) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $i = x, y, z$.

(b) $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$

37. Matrixdarstellung für Drehimpuls $l = 1$ *4 Punkte*

Leiten Sie unter Verwendung der Beziehungen

$$(\Psi_{l'm'}, \hat{L}_z\Psi_{lm}) = \hbar m\,\delta_{l',l}\delta_{m',m} \quad \text{und} \quad (\Psi_{l'm'}, \hat{L}_\pm\Psi_{lm}) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m\pm 1}$$

für festes $l \equiv l' \equiv 1$ eine Matrixdarstellung von $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ im $m - m'$ – Raum ab. Die Kugelfunktionen Ψ_{lm} sind Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators mit Gesamtdrehimpuls l und z–Komponente m. Berechnen Sie weiterhin den Kommutator $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ in dieser Matrixdarstellung.

38. Pauli-Matrizen *3 Punkte*

Wie bereits bekannt, erfüllen die Komponenten des Drehimpulsoperators die Kommutatorrelation $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$. Da $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$, lassen sich simultane Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ and $\hat{L}_z$ finden:

$$\hat{\mathbf{L}}^2\Psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\Psi_{lm}$$
$$\hat{L}_z\Psi_{lm} = \hbar m\Psi_{lm},$$

wobei l auf die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ quantisiert ist. Für gegebenes l sind die erlaubten Werte von $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$. Im Falle von Bahndrehimpuls sind l bzw. m ganze Zahlen, halbzahlige Werte für l, m sind jedoch in der Natur durch intrinischen Drehimpuls (den sogenannten *Spin*) fermionischer Teilchen realisiert. Alle bekannten elementaren fermionischen Materieteilchen tragen den Spin $l = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die entsprechende Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$. Die Matrixdarstellungen definieren bis auf einen Faktor $\hbar/2$ die sogenannten *Pauli-Matrizen*.