Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier

Quantenmechanik - Übungsblatt 1

Sommersemester 2016

Abgabe: Mittwoch, den 13.04. vor 11:00 Uhr, in den Briefkasten in der Brüderstr. 16.

1. Wellengleichung *2+2 Punkte*

Betrachten Sie die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = 0.$$

Hierbei ist $f(x,t)$ eine reellwertige Funktion der Ortskoordinate x und der Zeit t. Die Größe c besitzt die Dimension einer Geschwindigkeit. Im Folgenden sollen Sie zwei unterschiedliche Typen von Lösungen der Wellengleichung untersuchen.

(a) **Laufende Wellen:** Nehmen Sie an, dass die Funktion $f(x,t)$ nur von der Kombination $x \pm c\,t$ ihrer Argumente x und t abhängt. Machen Sie also den Ansatz $f(x,t) = h_\pm(x \pm c\,t)$, und überzeugen Sie sich, dass der Ansatz die Wellengleichung erfüllt. Welche Bedeutung haben die beiden Funktionen $h_\pm$?

(b) **Stehende Wellen:** Nehmen Sie an, dass die Funktion $f(x,t)$ bezüglich der Orts- und Zeitabhängigkeit faktorisiert. Machen Sie daher den Ansatz $f(x,t) = h(t)g(x)$, und leiten Sie Bestimmungsgleichungen für h und g her.

2. Plancksche Strahlungsformel *2+3+2 Punkte*

Betrachten Sie die Plancksche Strahlungsformel für die Energiedichte pro Frequenzintervall $u(\omega)$ der Strahlungsmoden mit Kreisfrequenz ω bei der Temperatur T:

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T} - 1}.$$

Hierbei ist $h = 2\pi\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit und k_B die Boltzmann-Konstante. Die Größe $u(\omega)d\omega$ gibt die im Strahlungsfeld enthaltene Energie im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$ an.

(a) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Energiedichte pro Wellenlängenintervall $w(\lambda)$ der Strahlungsmoden mit Wellenlänge λ. Schreiben Sie dazu die Energie $u(\omega)d\omega$ im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$ um in die Form $w(\lambda)d\lambda$ und nutzen Sie den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenlänge um $w(\lambda)$ zu erhalten.

(b) Ermitteln Sie das Maximum $\lambda_{\max}$ der Funktion $w(\lambda)$, und zeigen Sie, dass $\lambda_{\max} = b/T$, mit einer zu bestimmenden Konstanten b.

(c) Berechnen Sie mit $T = 6000\,\mathrm{K}$ als Abschätzung für die Oberflächentemperatur der Sonne den Wert von $\lambda_{\max}$ für Sonnenstrahlung.

Hinweis: Die Lösung der Gleichung $5 - x = 5\,\mathrm{e}^{-x}$ ist $x \approx 4.96511$.

3. Photoelektrischer Effekt *2 Punkte*

Die maximale Energie von Photoelektronen beträgt für Aluminium 2.3 eV für einfallende Strahlung mit Wellenlänge $\lambda = 200\,\mathrm{nm}$, und 0.90 eV bei einer Wellenlänge von $\lambda = 258\,\mathrm{nm}$.

(a) Bestimmen Sie aus diesen Daten das Plancksche Wirkungsquantum.

(b) Ermitteln Sie die Austrittsenergie von Aluminium.

4. Elektronenmikroskop *2 Punkte*

Der kleinste Abstand l, der von einem optischen Mikroskop noch aufgelöst werden kann, liegt in der Größenordnung der Wellenlänge λ des eingesetzten Lichts. Dies gilt ebenso für ein Elektronenmikroskop. Bestimmen Sie unter Verwendung der de-Broglie Beziehung $p = h/\lambda$ die Energie E, welche die Elektronen mindestens haben müssen, um Abstände von

(a) $l = 15\,\mathrm{nm}$,

(b) $l = 0.5\,\mathrm{nm}$

noch aufzulösen.