
Quantenmechanik - Übungsblatt 2

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 17.04., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 22.04., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: Dieses Übungsblatt vertieft das Verständnis der Wellengleichung, indem ihre Anwendung in den ersten beiden Aufgaben eingeübt wird. Aus der Schrödinger-Gleichung können in systematischer Weise die Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingungen hergeleitet werden. Von der Mächtigkeit dieser Näherungsmethode sollen Sie sich anhand einer Modellrechnung zum Quarkonium überzeugen. Verständnis der Quantenmechanik und routiniertes Rechnen mit Operatoren gehen Hand in Hand. In der letzten Übungsaufgabe legen wir hierzu den ersten Grundstein.

6. Klein–Gordon–Gleichung

0 Punkte

Die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen kann aus der nichtrelativistischen Energie–Impuls–Beziehung $E = \frac{p^2}{2m_0}$, $p = |\mathbf{p}|$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, durch die Ersetzung

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

gewonnen werden. Leiten Sie auf analoge Weise – siehe Vorlesung – eine Wellengleichung aus der relativistischen Energie–Impuls–Beziehung ab (Klein–Gordon–Gleichung).

Machen Sie für die relativistische Wellenfunktion $\Phi(\mathbf{r}, t)$ den Ansatz $\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} \Psi(\mathbf{r}, t)$, mit m_0 der Ruhemasse des Teilchens. Leiten Sie damit für ein langsam bewegtes Teilchen die Wellengleichung für $\Psi(\mathbf{r}, t)$ in führender Ordnung in E_{kin}/E_0 ab, wobei die Ruheenergie als $E_0 = m_0 c^2$ gegeben ist. Zeigen Sie somit, dass die Schrödinger-Gleichung sich im Grenzfall niedriger kinetischer Energie ergibt.

7. Zur Schrödinger-Gleichung

3 Punkte

Die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ eines Teilchens in einem Potential $V(\mathbf{r})$ genügt der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t).$$

Zeigen Sie, daß die Lösung der Schrödinger-Gleichung im allgemeinen *nicht* einfach durch $\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - Et/\hbar)}$ mit der “Energie” $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann. Hierbei ist $k = |\mathbf{k}|$.

8. Quarkonium

5 Punkte

Ein Quark, der elementare Bestandteil eines Protons oder Neutrons, wechselwirkt mit seinem Antiteilchen, dem Antiquark über ein Potential, das in guter Näherung als linear angenommen werden kann. Es hat also die Form

$$V(r) = Fr,$$

wobei r ($r \geq 0$) der Abstand zwischen Quark und Antiquark ist. Die Dynamik der Relativkoordinate r ist unter Verwendung der reduzierten Masse m_r äquivalent zum *eindimensionalen Problem* eines Balles im Gravitationsfeld, der elastisch am Erdboden ($r = 0$) reflektiert wird.

Das Quark-Antiquark System bildet gebundene Zustände und wird *Quarkonium* genannt. Wenden Sie die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung an, um die diskreten Energien des Quarkoniums zu berechnen. Nach der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung muß für einen stationären Zustand (mit p als kanonischem Impuls und q der zugehörigen generalisierten Koordinate des Systems)

$$\oint p dq = 2\pi\hbar(n + \gamma)$$

gelten. In unserem Problem ist für den *Maslow-Index* $\gamma = -\frac{1}{4}$ zu wählen.

a) Nehmen Sie eine nicht-relativistische Energie-Impuls Beziehung an und berechnen Sie die quantisierten Energien nach Bohr-Sommerfeld. Wo liegen die klassischen Umkehrpunkte?

b) Experimentell kann die Rückstellkraft F abgeschätzt werden zu $F \simeq 1 \text{ GeV/fm}$, die reduzierte Masse des Quark-Antiquark Systems zu 500 MeV . Berechnen Sie hiermit den Energieabstand zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Niveau. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Messwert von etwa 500 MeV .

Beachten Sie: 1 fm (Femtometer) = 10^{-15} m ; Massen werden in der Elementarteilchenphysik gerne in Energieeinheiten angegeben, die Umrechnung in kg ist nicht schwer.

9. Lineare Operatoren

2+3 Punkte

(i) Welche der folgenden Operatoren, die auf Funktionen $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wirken, sind linear?

- | | |
|---|---|
| a) $\hat{O}_1 \Psi(x) = x^3 \Psi(x)$ | b) $\hat{O}_2 \Psi(x) = x \frac{d}{dx} \Psi(x)$ |
| c) $\hat{O}_3 \Psi(x) = \alpha \Psi(x), \alpha \in \mathbb{C}$ | d) $\hat{O}_4 \Psi(x) = e^{\Psi(x)}$ |
| e) $\hat{O}_5 \Psi(x) = \frac{d}{dx} \Psi(x) + a, a \in \mathbb{C}$ | f) $\hat{O}_6 \Psi(x) = \int_{-\infty}^x dx' \Psi(x') x'$ |

(ii) Lösen Sie das Eigenwertproblem für den Operator \hat{O}_6 , also

$$\hat{O}_6 \Psi(x) = \lambda \Psi(x).$$

Welche Eigenwerte λ führen zu quadratintegrablen Eigenfunktionen?

Hinweis: Differenzieren Sie beide Seiten der Gleichung nach x .