Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier, L. Kimme, M. Treffkorn

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 11

Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Mittwoch, den 13.01., um 11:00 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://home.uni-leipzig.de/stp/mathematical_methods_1_ws1516.html.

1. Volumenintegral und Divergenz

1+2+2+1 Punkte

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z)$ ist definiert als div $\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.

a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{F} = (x, y, z)$.

Bestimmen Sie explizit das Mehrfachintegral

$$\int_G \text{div } \mathbf{F} \; dxdydz$$

für

b) eine Kugel $G = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \;\; |\mathbf{r}| \leq R\}$ mit Radius R um den Koordinatenursprung,

c) einen Würfel mit $G = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \; -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1, \; -1 \leq z \leq 1\}$.

d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus der dritten Aufgabe von Blatt 10 und begründen Sie.

2. Satz von Gauß

2+2+3 Punkte

Über ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$ ist bekannt, dass es von der Form

$$\vec{E} = E(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

ist und die Gleichung

$$\text{div}\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & \text{für } |\vec{r}| \leq R_0 \\ 0 & \text{für } |\vec{r}| > R_0 \end{cases}$$

erfüllt.

a) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{E}$ durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung.

b) Berechnen Sie das Integral $\iiint_K \text{div}\vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r$, wobei K das Volumen der Kugel aus **a)** ist.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß und der Ergebnisse aus **a)** und **b)** die Funktion $E(|\vec{r}|)$ und skizzieren Sie diese.

3. Fluss eines Vektorfeldes in 2D

1+1+2 Punkte

Bisher wurde der Fluss eines 3-dimensionalen Vektorfeldes durch eine 2-dimensionale Fläche berechnet. Analog soll in dieser Aufgabe im 2-dimensionalen Raum (also in der Ebene) der Fluss eines 2-dimensionalen Vektorfeldes durch eine 1-dimensionale Fläche berechnet werden. Eine 1-dimensionale Fläche entspricht einer Kurve, der Flächenvektor steht dabei in jedem Punkt der Kurve senkrecht auf der Tangente.

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = (y, xy)$ und die Kurve $L = \{(x, y) \,|\, y = 2 - 2x,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

a) Geben Sie den normierten Normalenvektor $\vec{n}$ zu L an. Wählen Sie die Orientierung so, dass $\vec{n}$ eine positive x Komponente hat.

b) Drücken Sie dass infinitesimale Flächenelement $\mathrm{d}L$ durch $\mathrm{d}x$ aus.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch L.