Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier, L. Kimme, M. Treffkorn

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 10

Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Mittwoch, den 06.01., um 11:00 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://home.uni-leipzig.de/stp/mathematical_methods_1_ws1516.html.

1. Vektorfeld und Arbeit

1+1+2 Punkte

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(x^2 y, \quad x - z, \quad xyz\right).$$

Ein Teilchen wird entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ im Kraftfeld $\mathbf{F}$ vom Anfangspunkt $(0, 0, 2)$ zum Endpunkt $(4, 64, 2)$ bewegt. Die Kurve liegt in der Ebene $z = 2$ und ist durch den Graphen $y = x^3$ für $0 \leq x \leq 4$ gegeben.

a) Finden Sie eine Parametrisierung für die Kurve $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t)$.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Arbeit, die verrichtet wird, um das Teilchen entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ zu bewegen.

2. Fluss

1+1+1 Punkte

Gegeben sei das Einheitsquadrat $Q = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ z = 0\}$ in der xy-Ebene. Berechnen Sie den Fluss

$$\int_Q \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

durch Q für folgende Vektorfelder

a) $\mathbf{F} = (0, 0, 1)$,

b) $\mathbf{F} = (0, 0, x^2 + y^2)$,

c) $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$.

3. Oberflächenintegral

2+2 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = (x, y, z).$$

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ durch die Oberfläche

a) einer Kugel mit Radius R um den Koordinatenursprung,

b) eines Quaders mit $Q = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 |\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

4. Fluss *1+2+2+2 Punkte*

Betrachten Sie die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq z \leq 4\},$$

welche so orientiert sein soll, dass die Flächennormale überall eine negative z-Komponente hat. Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} = (z, 2y, x)$.

a) Skizzieren Sie S.

b) Berechnen Sie den normierten Normalenvektor von S in jedem Punkt der Fläche.

c) Drücken Sie das infinitesimale Flächenelement $\mathrm{d}S$ durch Differentiale der Koordinaten in der $z = 0$ Ebene aus.

d) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ durch S.

Hinweise: Es ist hilfreich die $z = 0$ Ebene durch Polarkoordinaten zu parametrisieren. Die Normalenvektoren von S erhält man z.B. aus dem Gradientenfeld einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

5. Oberfläche eines Kugelsektors *3 Punkte*

Berechnen Sie die Oberfläche eines Kugelsektors mit Radius R und Öffnungswinkel θ.

Hinweis: Der Anteil, welcher von der Oberfläche der Kugel stammt, ist als zwei dimensionales Integral in geeigneten Koordinaten zu ermitteln.