Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier, L. Kimme, M. Treffkorn

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 9

Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Mittwoch, den 16.12., um 11:00 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://home.uni-leipzig.de/stp/mathematical_methods_1_ws1516.html.

1. Parametrisierung

1+1+3 Punkte

Ein Teilchen bewegt sich entlang einer Kurve, welche durch $\mathbf{r}(t) = (a\cos(\omega t), b\sin(\omega t))$ parametrisiert wird.

a) Was für eine Kurve ist $\mathbf{r}(t)$?

b) Bestimmen Sie die Ableitung $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

c) Sei $b = a$. Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$L(T) = \int_0^T |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$$

für den Parameter T. Was finden sie für $L(\frac{2\pi}{|\omega|})$?

Hinweis: Der Betrag $|\mathbf{k}|$ eines Vektors $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ ist definiert als $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

2. Schiefer Wurf

3+1+4 Punkte

Die Bewegung eines Teilchens am Anfangsort $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ und mit Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = v_0(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, -g)$$

beschrieben.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$.

b) Bestimmen Sie ausgehend von Ihrem Ergebnis in **a)** die Wurfparabel $y = y(x)$.

c) Bestimmen Sie die Länge der Wurfparabel

$$L(w) = \int_0^w \left| \frac{d}{dx}\boldsymbol{\gamma}(x) \right| dx$$

mit der Parametrisierung $\boldsymbol{\gamma}(x) = (x, y(x))$ aus **b)** und der Wurfweite w in x-Richtung.

Hinweis: Verwenden Sie mit geeignetem z

$$\sqrt{1 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(z\sqrt{z^2 + 1} + \mathrm{Arsinh}(z)\right).$$

3. Kraft und Arbeit

1+3+3+2 Punkte

Ein gegebenes Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y)$ wirkt auf einen Massepunkt, der sich entlang des Bogens eines Viertelkreises mit der Parametrisierung $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ für $0 \leq t \leq \pi/2$ bewegt.

a) Bestimmen Sie $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

Die Arbeit W ist definiert als

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

wobei $\mathcal{C}$ die Kurve bezeichnet, die durch $\mathbf{r}(t)$ parametrisiert ist. Berechnen Sie die Arbeit W für folgende Kraftfelder

b) $\mathbf{F}_1 = (0, x)$,

c) $\mathbf{F}_2 = (-y, 0)$,

d) $\mathbf{F}_3 = (-y, x)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel (ohne Herleitung)

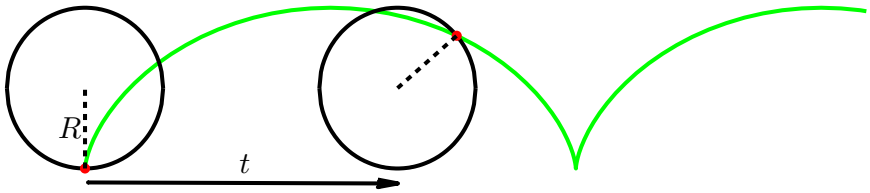
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\ dt,$$

wobei $\cdot$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet.

4. Abrollbewegung

2+2+4 Punkte

Betrachten Sie einen Kreis vom Radius R mit einem festen markierten Punkt (●). Nehmen Sie jetzt an, dass der Kreis in der x-y-Ebene abgerollt wird (siehe Skizze). Bei der Abrollbewegung beschreibt der Punkt (●) ein Kurve $\mathbf{r}(t)$, wobei t die x-Koordinate des Kreismittelpunktes sein soll.



a) Zeigen Sie, dass die oben beschriebene Kurve durch

$$\mathbf{r}(t) = \left(t - R\sin\left(\frac{t}{R}\right), R - R\cos\left(\frac{t}{R}\right)\right)$$

parametrisiert werden kann.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve zwischen zwei Nullstellen

$$L = \int_0^{2\pi R} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt.$$

Hinweis: Fertigen Sie in **a)** eine deutlich beschriftete Skizze an.