Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier, L. Kimme, M. Treffkorn

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 8

Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Mittwoch, den 09.12., um 11:00 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://home.uni-leipzig.de/stp/mathematical_methods_1_ws1516.html.

1. Gradient und Höhenlinien I *2+2 Punkte*

Sei $f(x, y) = x^2 - y^2$.

a) Zeichnen Sie die Höhenlinien der Funktion f. Welche Kurve wird durch die Gleichung $c = f(x, y)$ beschrieben?

b) Bestimmen Sie den Gradienten $\mathrm{grad} f$.

2. Gradient und Höhenlinien II *2+2+2 Punkte*

Sei $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Zeichnen Sie die Höhenlinien der Funktion f. Um was für eine Fläche handelt es sich bei $c = f(x, y)$?

b) Bestimmen Sie den Gradienten $\mathrm{grad} f$.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} f$ im Punkt $(1, 2)$ in Richtung des Vektors $\mathbf{v} = (1, 0)$.

3. Gradient und Tangente *2+1+2 Punkte*

Bestimmen Sie zur Funktion $f(x, y) = x^2y^3 + xy^2 + 2y$

a) die ersten partiellen Ableitungen nach x und y,

b) den Gradienten im Punkt (x, y),

c) sowie die Tangente an die Niveaufläche von f im Punkt $(1, 0)$.

4. Partielle Ableitungen *2+2 Punkte*

Betrachten Sie das Skalarfeld $f(x, y) = e^{xy^3} \sin(xy)$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f nach x und y.

b) Zeigen Sie durch explizites Ableiten, dass für die gemischten zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

5. Partielle Ableitung und Extremwerte *2+3+2+3 Punkte*

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$.

a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f nach x und y.

b) Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion f.

d) Bestimmen Sie die Art der stationären Punkte der Funktion f.

Hinweis: Die stationären Punkte einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x, y)$ lassen sich in Analogie zum eindimensionale Fall mit Hilfe der partiellen Ableitung bestimmen. Die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ lautet dabei

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial y} = 0.$$

Um die Art des stationären Punktes zu bestimmen, müssen Sie die zweiten partiellen Ableitungen

$$a := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial x} \quad b := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial y} \quad c := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial x}$$

bestimmen. Das Kriterium für die hinreichende Bedingung lautet dann

$$\begin{aligned} a > 0 \quad &\text{und} \quad ab - c^2 > 0 \longrightarrow \text{Minimum} \\ a < 0 \quad &\text{und} \quad ab - c^2 > 0 \longrightarrow \text{Maximum} \\ &\phantom{\text{und}} \quad ab - c^2 < 0 \longrightarrow \text{Sattelpunkt.} \end{aligned}$$