Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. C. Drukier, L. Kimme, M. Treffkorn

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 3

Wintersemester 2015/2016

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Mittwoch, den 04.11., um 11:00 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://home.uni-leipzig.de/stp/mathematical_methods_1_ws1516.html.

1. Klassifizierung von Differentialgleichungen *4+3 Punkte*

a) Bestimmen Sie Typ (homogen – inhomogen) <u>und</u> Ordnung der folgenden Differentialgleichungen.

i) $y' + ax = 0$ ii) $\frac{5}{4}y^{(3)} + \frac{2}{3}y'' = \frac{1}{2}y$

iii) $y' + ay = 0$ iv) $\frac{3}{10}y'' + \frac{2}{5}y' - \sin x = \frac{1}{6}y$

b) Welche der folgenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse der linearen Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

i) $y' + x^2 y = 2x$ ii) $5y'' - 2y' - 4y = 0$

iii) $y^{(4)} + 2xy'' + 3x^2 y' = 0$ iv) $y'' - \sin(x)y = 0$

v) $y'' - \frac{3}{2}y = 2$ vi) $2y'' - y' + x^9 = 0$

2. Differentialgleichungen erster Ordnung *3 Punkte*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen erster Ordnung.

i) $2y' + 12y = 0$ ii) $\frac{1}{6}y' = 2y$ iii) $6y' = 3y$

3. Anfangsbedingung *3+2 Punkte*

a) Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktionen $y_1 = \sin(2x)$ und $y_2 = \cos(2x)$ Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ sind. Zeigen Sie, dass auch $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ mit $A, B \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B, so dass $y(x)$ die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllt.

4. Exponentialansatz *6 Punkte*

Lösen Sie die Differentialgleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes. Geben Sie stets die allgemeine Lösung an. Geben Sie bei komplexen Lösungen zusätzlich die reelle Lösung an.

i) $2y'' + \frac{1}{2}y = 0$, ii) $\frac{1}{2}y'' + y' - \frac{1}{2}y = 0$, iii) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Hinweis: Der Exponentialansatz wird für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verwendet und lautet $y(x) = e^{\lambda x}$. Setzen Sie den Ansatz in die Differentialgleichung ein und lösen Sie dann die algebraische Gleichung $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhalten Sie dann als

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

5. Trennung der Variablen *2+3+3 Punkte*

Die Gesamtenergie E eines fallenden Teilchen mit Masse m ist gegeben als

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t), \qquad (*)$$

wobei $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

a) Bringen Sie Gleichung $(*)$ durch geeignete Wahl von a und b in die Form $\dot{x}^2 = b - ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = -\sqrt{b - ax}$ für $E = 0$ und die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ unter Verwendung der Methode der Trennung der Variablen.
Hinweis: Beachten Sie, dass hier für ein fallendes Teilchen gilt $\dot{x} \leq 0$ und $x \leq 0$.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = +\sqrt{b - ax}$ für $E = mv_0^2/2$ mit $v_0 > 0$ und die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ unter Verwendung der Methode der Trennung der Variablen.

Hinweis: Die Methode der Trennung der Variablen für Differentialgleichungen erster Ordnung funktioniert wie folgt. Angenommen Sie haben eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(t)h(x).$$

Dann stellen Sie diese Gleichung so um, dass auf einer Seite die x-abhängigen und auf der anderen Seite alle t-abhängigen Terme stehen, d.h. hier

$$f(t) = \frac{\dot{x}}{h(x)}.$$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten über t integriert

$$\int_0^{t_1} f(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))}dt = \int_{x(0)}^{x(t_1)} \frac{1}{h(x)}dx,$$

wobei hier bereits auf der rechten Seite die Substitutionsregel verwendet wurde. Integration und anschließendes Umstellen nach $x(t_1)$ liefert die Lösung der Differentialgleichung.