Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt Bonus

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 23.02., um 13:30 Uhr** in Prof. Rosenow's Briefkasten im Institut für Theoretische Physik in der Brüderstr. 16 eingeworfen werden. Der Briefkasten befindet sich der ersten Etage am Ende des Ganges hinter der Küche. Falls Sie Ihren Punktestand aufbessern wollen, können Sie die bearbeiteten Aufgaben abgeben. Die Nichtabgabe hat keine Auswirkungen auf Ihren bisherigen Punktestand.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Taylorpolynome

6+6 Punkte

Skizzieren Sie in der Umgebung des Punktes $x_0 = 0$ die Funktion $f(x)$. Berechnen Sie die Näherungspolynome $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$ und skizzieren Sie deren Graphen.

a) $f(x) = \tan x$

b) $f(x) = \frac{x}{4-x}$

2. Mehrfachintegrale

3+3+6 Punkte

a) Berechnen Sie

$$I = \int_G 1 \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x > 0\}.$$

b) Berechnen Sie

$$I = \int_G 1 \; dxdydz \qquad \text{mit} \qquad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}.$$

c) Bestimmen Sie das folgende Mehrfachintegral für $r < R$

$$\int_T 1 \; dxdydz \qquad \text{mit} \qquad T = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

3. Polarkoordinaten

4+2+4+2+4 Punkte

Betrachten Sie Polarkoordinaten, d.h.

$$\mathbf{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Wir definieren die Vektorfelder

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$, indem Sie die definierten Ausdrücke explizit ausrechnen.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ für alle r, φ senkrecht aufeinander stehen.

c) Drücken Sie die Vektoren $\mathbf{e}_x = (1,0)$ und $\mathbf{e}_y = (0,1)$ durch $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ aus.

d) Bestimmen Sie die Divergenz von $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$.

e) Bestimmen Sie die Rotation von $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$.