Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 14

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 26.01., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 29.01. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Vektorfeld und Arbeit

1+2+4 Punkte

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(x^2 y, \quad x - z, \quad xyz\right).$$

Ein Teilchen wird entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ im Kraftfeld $\mathbf{F}$ vom Anfangspunkt $(0, 0, 2)$ zum Endpunkt $(4, 64, 2)$ bewegt. Die Kurve liegt in der Ebene $z = 2$ und ist durch den Graphen $y = x^3$ für $0 \leq x \leq 4$ gegeben.

a) Finden Sie eine Parametrisierung für die Kurve $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t)$.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Arbeit, die verrichtet wird, um das Teilchen entlang der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ zu bewegen.

2. Kraft und Rotation

1+4+5+2+2 Punkte

Gegeben Sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(-2xz, \quad -2yz, \quad -x^2 - y^2\right).$$

Ein Teilchen wird entlang des geschlossenen Einheitskreises mit Anfangs- und Endpunkt $(1, 0, 0)$ in der xy-Ebene um den Koordinatenursprung bewegt.

a) Finden Sie eine Parametrisierung für diese Kurve.

b) Bestimmen Sie die zu verrichtende Arbeit.

c) Ein Teilchen wird jetzt entlang eines geschlossenen Kreises mit Anfangs- und Endpunkt $(1, 0, 0)$ in der xz-Ebene um den Koordinatenursprung bewegt. Finden Sie eine Parametrisierung für diese Kurve und bestimmen Sie die zu verrichtende Arbeit.

d) Berechnen Sie die Rotation des Kraftfeldes.

e) Zeigen Sie durch explizites Ableiten, dass $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$ mit dem skalaren Potential $U(\mathbf{r}) = z(x^2 + y^2)$.

Hinweis: Die Rotation eines Kraftfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z)$ ist definiert als

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

3. Magnetfeld

4+2+2 Punkte

Gegeben sei das Magnetfeld

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y, & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das Linienintegral von **H** mit Anfangs- und Endpunkt $(1, 0, 0)$ entlang des geschlossenen Kreises mit Radius 1 um den Koordinatenurprung in der xy-Ebene.

b) Wiederholen Sie die Rechnung aus **a)** für einen geschlossenen Kreises mit Radius $R > 0$.

c) Berechnen Sie die Rotation des Magnetfeld für $x^2 + y^2 > 0$.