Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 12

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 12.01., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 15.01. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Partielle Ableitungen

4+5+0 Punkte

a) Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktionen

$$X(r,\varphi) = r\cos(\varphi), \quad Y(r,\varphi) = r\sin(\varphi).$$

Bei der Transformation von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten, wird das Integrationsmaß wie folgt transformiert

$$dxdy = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} X_r & X_\varphi \\ Y_r & Y_\varphi \end{pmatrix} drd\varphi = (X_r Y_\varphi - X_\varphi Y_r)drd\varphi.$$

Hierbei wird $\begin{pmatrix} X_r & X_\varphi \\ Y_r & Y_\varphi \end{pmatrix}$ als Jacobi-Matrix und $(X_r Y_\varphi - X_\varphi Y_r)$ als Jacobi-Determinante bezeichnet. Berechnen Sie die Jacobi-Determinante.

b) Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktionen

$$X(r,\theta,\varphi) = r\cos(\varphi)\sin(\theta), \quad Y(r,\theta,\varphi) = r\sin(\varphi)\sin(\theta), \quad Z(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta).$$

c) Berechnen Sie analog zu **a)** die Jacobi-Determinante für die Koordinatentransformation aus Aufgabe **b)**

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} X_r & X_\theta & X_\varphi \\ Y_r & Y_\theta & Y_\varphi \\ Z_r & Z_\theta & Z_\varphi \end{pmatrix} = X_r(Y_\theta Z_\varphi - Y_\varphi Z_\theta) - Y_r(X_\theta Z_\varphi - X_\varphi Z_\theta) + Z_r(X_\theta Y_\varphi - X_\varphi Y_\theta)$$

der partiellen Ableitungen von X, Y und Z nach r, θ und φ. Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit dem Integrationsmaß für die Kugelkoordinaten.

2. Elementare Mehrfachintegrale

2+2+2 Punkte

Berechnen Sie die folgenden elementaren Integrale.

a)

$$I_1 = \int_G \pi \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = [0,1] \times [0,1],$$

b)

$$I_2 = \int_G x \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = [0,1] \times [0,1],$$

c)

$$I_3 = \int_G xy \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = [0,1] \times [0,1].$$

3. Mehrfachintegrale

3+3+3+3 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Verwenden Sie dazu geeignete Koordinaten.

a)

$$I_1 = \int_G \sin(x+y) \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2],$$

b)

$$I_2 = \int_G \frac{x^2 z^3}{1+y^2} \; dxdydz \qquad \text{mit} \qquad G = [0,1] \times [0,1] \times [0,1],$$

c)

$$I_3 = \int_G xy \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\},$$

d)

$$I_4 = \int_G \left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \; dxdy \qquad \text{mit} \qquad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| \leq a\},$$