Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 10

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 15.12., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 18.12. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Randbedingungen

6 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ mit Hilfe des Exponentialansatzes für die folgenden Randbedingungen:

$$\text{i)}\;\; y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = -1 \qquad \text{ii)}\;\; y(\frac{\pi}{4}) = a, \quad y''(0) = b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Trennung der Variablen I

2+3+3 Punkte

Die Gesamtenergie E eines fallenden Teilchen mit Masse m ist gegeben als

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t), \qquad (*)$$

wobei $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

a) Bringen Sie Gleichung $(*)$ durch geeignete Wahl von a und b in die Form $\dot{x}^2 = b - ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = -\sqrt{b - ax}$ für $E = 0$ und die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ unter Verwendung der Methode der Trennung der Variablen.
Hinweis: Beachten Sie, dass hier für ein fallendes Teilchen gilt $\dot{x} \leq 0$ und $x \leq 0$.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = +\sqrt{b - ax}$ für $E = mv_0^2/2$ mit $v_0 > 0$ und die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ unter Verwendung der Methode der Trennung der Variablen.

Hinweis: Die Methode der Trennung der Variablen für Differentialgleichungen erster Ordnung funktioniert wie folgt. Angenommen Sie haben eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(t)h(x).$$

Dann stellen Sie diese Gleichung so um, dass auf einer Seite die x-abhängigen und auf der anderen Seite alle t-abhängigen Terme stehen, d.h. hier

$$f(t) = \frac{\dot{x}}{h(x)}.$$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten über t integriert

$$\int_0^{t_1} f(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))}dt = \int_{x(0)}^{x(t_1)} \frac{1}{h(x)}dx,$$

wobei hier bereits auf der rechten Seite die Substitutionsregel verwendet wurde. Integration und anschrießendes Umstellen nach $x(t_1)$ liefert die Lösung der Differentialgleichung.

3. Trennung der Variablen II

1+3+2 Punkte

Die Form eines frei hängenden Kabels, das an beiden Enden auf gleicher Höhe $y(0) = y(1) = 0$ befestigt ist, wird durch die Differentialgleichung

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (**)$$

beschrieben.

a) Drücken Sie die Gleichung $(**)$ durch $g(x) = y'(x)$ aus.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Funktion $g(x)$ unter Verwendung der Methode der Trennung der Variablen.

c) Bestimmen Sie $y(x)$ indem Sie die Gleichung $g(x) = y'(x)$ integrieren und anschließend die Randbedingungen einsetzen.

4. Stromkreis und Variation der Konstanten

2+4+2 Punkte

Ein Stromkreis enthält eine Spule mit Induktivität L und einen Widerstand R. Die Stromstärke dieses Stromkreises wird durch die lineare Differentialgleichung

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t) \qquad (***)$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $U(t) = 0$.

b) Bestimmen Sie jetzt die Lösung der Differentialgleichung für $U(t) = U_0$.

Hinweis: Diese inhomogene Differentialgleichung kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden. Setzen Sie dazu als Ansatz

$$I_{\text{in}}(t) = C(t)I_{\text{hom}}(t)$$

ein, wobei $I_{\text{hom}}(t)$ die Lösung der homogenen Differentialgleichung [aus Aufgabenteil (a)] und $C(t)$ eine zu bestimmende Funktion ist. Wenn Sie diesen Ansatz in Gleichung $(***)$ einsetzen, so finden Sie eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $C(t)$, die Sie durch Integration lösen können.

c) Bestimmen Sie $I_{\text{in}}(t)$ für die Anfangsbedingung $I_{\text{in}}(0) = I_0$. Was erhalten Sie im Limes $t \longrightarrow \infty$?