Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 8

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 01.12., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 04.12. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Komplexe Zahlen I

2+2+2 Punkte

Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, $z_1 \cdot z_2^*$ und $z_1^* \cdot z_2$ für folgende komplexe Zahlen und bringen Sie die Ausdrücke in die Form $z = x + iy$:

a) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$,
b) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$,
c) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 2 - 5i$.

2. Komplexe Zahlen II

2+2+2 Punkte

Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil, Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

a) $\frac{1}{1+i}$,
b) $(1 + i)^{3047}$,
c) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^3$.

3. Komplexe Zahlen III

2+2+2 Punkte

Ermitteln Sie <u>alle</u> komplexen Lösungen ausgedrückt durch $z = x + iy$ oder $z = r\exp(i\phi)$ der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 = -1$,
b) $z^8 = -1$,
c) $|z| = z \cdot z^*$.

4. Komplexe Zahlen IV

2+2+3 Punkte

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x+iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} \ .$$

b) Bestimmen Sie für $z = 1 + i\sqrt{3}$ die reelle Zahlen a und ϕ so, dass $z = a\ \exp(i\phi)$.

c) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

5. Komplexe Zahlen II

1+2+2 Punkte

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Zeigen Sie ausgehend von dieser Darstellung, dass:

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

b) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. (Formel von Moivre)

c) Finden Sie ausgehend von b) eine Formel für $\cos 3\alpha$ und $\sin 3\alpha$.