Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 7

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 24.11., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 27.11. in der Übung besprochen. **Hinweis: Am 27.11. werden beide Übungsgruppen zusammengelegt und es findet nur eine Übung von 07:30 bis 09:00 Uhr statt.**

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Taylorreihen

2+2+2 Punkte

In dieser Aufgabe sollen Sie die Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$ für die Funktionen

i) $f_1(x) = \cos x$ ii) $f_2(x) = \cosh x$

bestimmen.

a) Berechnen Sie zunächst die ersten <u>vier</u> Ableitungen von f_1 und f_2 an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Geben Sie die n-te Ableitung von f_1 und f_2 an der Stelle $x_0 = 0$ an.

c) Geben Sie die Taylorreihe für f_1 und f_2 an der Stelle $x_0 = 0$ an.

2. Näherungspolynome

2+2+2 Punkte

a) Berechnen Sie Näherungspolynome zu führender Ordnung in x an der Stelle $x_0 = 0$ für

i) $f(x) = \sin x$ ii) $f(x) = \tan x$

b) Berechnen Sie Näherungspolynome zu führender Ordnung in x an der Stelle $x_0 = \pi$ für

i) $f(x) = \cos x$ ii) $f(x) = \tan x$

c) Entwickeln Sie die folgenden Terme bis zur zweiten Ordnung:

i) $\dfrac{1}{(1+x)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ ii) $\sqrt{1+x}$

3. Logarithmus

5 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $L(x) = \ln(1 + x)$ für $x > -1$.

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von L.

b) Geben Sie die Taylorpolynome $p_n(x)$ ersten, zweiten und dritten Grades von L an der Stelle $x_0 = 0$ an.

c) Machen Sie eine Skizze, in dem L und diese drei Polynome verzeichnet sind.

4. Kinetische Energie *4 Punkte*

Ein Objekt mit Geschwindigkeit v und Ruhemasse m besitzt die relativistische Gesamtenergie

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad .$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass für $v \ll c$ die relativistische Energie in die kinetische Energie $E(v) - E(0) = mv^2/2$ übergeht und berechnen Sie die erste relativistische Korrektur dazu.

5. Fourier-Entwicklung *6 Punkte*

Häufig ist es sinnvoll, eine Funktion

$$f : [-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch trigonometrische Funktionen zu approximieren. Diese Approximation heißt Fourier-Entwicklung und in n-ter Ordnung ist sie gegeben als

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx. \tag{3}$$

Betrachten Sie jetzt die Funktion $f(x) = x$ und

a) berechnen Sie die Koeffizienten aus Gl. (1-3) bis zur Ordnung $n = 1$,

b) berechnen Sie die Koeffizienten aus Gl. (1-3) bis zur Ordnung $n = 3$ und

c) skizzieren die Funktion f, f_1, f_2 und f_3.