Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 6

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 17.11., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 20.11. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Substitution

2+2+2+2 Punkte

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integral mit Hilfe der Substitutionsregel.

a) Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Benutzen Sie die Substitution $x = \tan(u)$.

b) Bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Benutzen Sie die Substitution $x = \sin(u)$.

c) Bestimmen Sie

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{1-x^2} dx$$

für $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Benutzen Sie die Substitution $x = \tanh(u)$.

d) Bestimmen Sie

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Benutzen Sie die Substitution $x = \sinh(u)$.

Hinweis: Die Regel für die Substitution lautet

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \underbrace{=}_{x=g(u),\ dx=g'(u)du} \int_{g^{-1}(x_1)}^{g^{-1}(x_2)} f(g(u))g'(u)du = \int_{u_1}^{u_2} h(u)du.$$

Hierbei sind $u_1 = g^{-1}(x_1)$ und $u_2 = g^{-1}(x_2)$ die transformierten Integralgrenzen und

$$h(u) = f(g(u))g'(u)$$

ist der transformierte Integrand.

2. Uneigentliche Integrale

1+1+2+3 Punkte

a) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{0,999}} dx.$$

b) Bestimmen Sie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1,001}} dx.$$

c) Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx.$$

Hinweis: Partielle Integration.

d) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Hinweis: Erweitern Sie Zähler und Nenner mit $\sqrt{1+x}$, teilen das Integral dann in die Summe zweier Integrale auf und und verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 1.

3. Partialbruchzerlegung

2+2+3 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

a)

$$\int_0^2 \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx.$$

b)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} dx.$$

c)

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3-x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx.$$

4. Bogenlänge

4 Punkte

Bestimmen Sie die Länge des Kurve

$$f(x) = \ln(1-x^2)$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Hinweis: Die Länge L der Kurve $[x_1, x_2] \mapsto f(x)$ ist definiert als

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx.$$