Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 4

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 03.11., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 06.11. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Stammfunktionen *4 Punkte*

Gegeben sei $f(x)$. Bestimmen Sie diejenigen Stammfunktionen $F(x)$ zu $f(x)$, die die angegebenen Randbedingungen erfüllen:

i) $f(x) = 3x$ Randbedingung: $F(1) = 2$

ii) $f(x) = 3x$ Randbedingung: $F(2) = 1$

iii) $f(x) = 3x$ Randbedingung: $F(0) = 0$

iv) $f(x) = 2x + 3$ Randbedingung: $F(1) = 0$

2. Flächenfunktionen *6 Punkte*

a) Geben Sie die Ableitung der folgenden Funktionen an:

i) $F(x) = \int_0^x \sqrt{2t^5 - 3t}dt$ ii) $F(t) = \int_0^t \sin(\omega r + \alpha)dr$

iii) $F(x) = \int_0^x e^{At}dt$

b) Wie lautet die zur Funktion $f(x) = x^2$ gehörende Flächenfunktion $A(x)$? (Randbedingung $A(0) = 0$).

c) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

i) $\int_0^{\pi/2} 2\sin x\, dx$ ii) $\int_{-\pi}^0 2\sin x\, dx$ iii) $\int_{\pi/2}^{\pi/2} 2\sin x\, dx$

3. Bestimmte Integrale *6 Punkte*

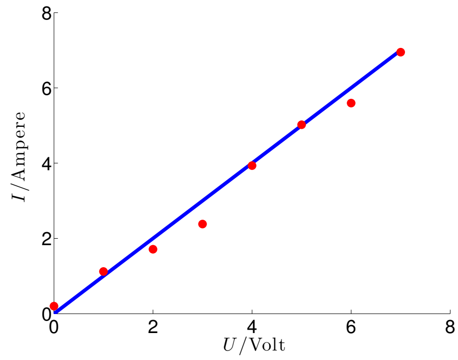
Berechnen Sie die bestimmten Integrale

i) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy$ ii) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx$ iii) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$

4. Linearer Fit / Methode der kleinsten Quadrate *1+2+2+1 Punkte*

Bei einem Experiment werden verschiedene Spannungen $U_1, \dots, U_N$ an einen Draht angelegt und die sich ergebenden Stromstärken $I_1, \dots, I_N$ gemessen. Die natürliche Zahl N bezeichnet die Anzahl der Messungen. Ein Plot der Daten U (in Volt) gegen I (in Ampere) zeigt, dass in guter Näherung ein linearer Zusammenhang $U = R \cdot I$ besteht, auch wenn die Messdatenpaare (U_k, I_k) nicht genau auf einer Geraden liegen.
Es soll nun der elektrische Widerstand R so bestimmt werden, dass die Messdatenpaare möglichst gut approximiert werden. Dazu kann man so vorgehen, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$f(R) = \sum_{k=1}^{N} (R \cdot I_k - U_k)^2$$



betrachtet.

a) Geben Sie die notwendige und die hinreichende Bedingung an, unter denen eine zweimal stetig differenzierteren Funktion $f(R)$ ein Minimum im Punkt R_0 aufweist?

b) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion $f(R)$.

Hinweis: Das Summenzeichen ist definiert als

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

und die Ableitung einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der gliedweise abgeleiteten Funktionen, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{N} a_k(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dx} a_k(x).$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(R) = \sum_{k=1}^{N} (R \cdot I_k - U_k)^2$ ein Minimum besitzt, und bestimmen Sie das minimierende R ausgedrückt durch die Messdaten U_k, I_k.

d) Unter welcher Bedingung besitzt die Funktion $f(R)$ eine Nullstelle?