
Mathematische Methoden 1 - Übungsblatt 2

Wintersemester 2014/2015

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis spätestens **Montag, den 20.10., um 13:30 Uhr** in den mit "Übungen Mathematische Methoden I" beschrifteten Briefkasten im Physikgebäude in der Linnestr. 5 schriftlich eingeworfen werden. Die Aufgaben werden am 23.10. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_1_WS1415.html.

1. Trigonometrische Funktionen

2+3 Punkte

a) Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \quad \text{und} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{1 + \cot^2 \phi} .$$

b) Zeigen Sie

1. $\sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi$ bzw. $\cos(2\phi) = 2 \cos^2 \phi - 1$,

2. $\cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi)$,

3. $\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2 \sin \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} \cos \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2}$.

mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \pm \cos \phi_1 \cdot \sin \phi_2 , \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \mp \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 . \end{aligned}$$

2. Rechenregeln für Logarithmen

3+2 Punkte

a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ bzw. $(e^n)^m = e^{n \cdot m}$:

1) $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$ 2) $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$ 3) $\ln(A^m) = m \cdot \ln(A)$

b) Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} .$$

3. Hyperbolische Funktionen

4 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

folgende Beziehungen:

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ bzw. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

4. Umkehrfunktionen

2+2 Punkte

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit?

b) Zeigen Sie

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen.