

Physikalisches Anfängerpraktikum, Fakultät für Physik und Geowissenschaften, Universität Leipzig

O 15 Mikroskop und Fernrohr

Aufgaben

1 Ermitteln Sie für ein Mikroskop bei verschiedenen mechanischen Tubuslängen t_m den linearen Abbildungsmaßstab des Objektivs! Bestimmen Sie mittels graphischer Auswertung die Brennweite des Objektivs!

2 Messen Sie die Mikroskopvergrößerung für mehrere Werte von t_m , und bestimmen Sie mittels graphischer Auswertung die Brennweite des Okulars!

3 Ermitteln Sie durch Messung die numerische Apertur A des Mikroskopobjektivs für eine gegebene Tubuslänge t_m ! Berechnen Sie für diesen Fall die Auflösungsgrenze des Mikroskops (Wellenlänge $\lambda = 550 \text{ nm}$, Brechzahl $n = 1$)!

4 Bestimmen Sie die Vergrößerung eines astronomischen Fernrohres aus mindestens fünf Messungen mit einer Längenmaßstab als Gegenstand bei endlichem Abstand zum Fernrohr!

5 Messen Sie bei diesem Fernrohr für mindestens fünf Gegenstandsgrößen mit Hilfe des Okularmikrometers die Größe des Zwischenbildes B_z ! Bestimmen Sie aus der graphischen Darstellung $G=G(B_z)$ die Brennweite des Objektivs und daraus die optische Tubuslänge t_0 !

6 Berechnen Sie die Brennweite des Fernrohrokulars! Berechnen Sie außerdem für das auf unendlich eingestellte Fernrohr mit dem Objektivrand als Eintrittspupille (Durchmesser 63mm) die Lage und die Größe der Austrittspupille sowie die Lichtstärke des Fernrohres!

Literatur

Physikalisches Praktikum, 11. Auflage, Hrsg. D. Geschke, Optik, 1.0, 1.3, 1.4
Gerthsen Physik, H. Vogel, 20. Auflage, 9.2.5, 9.2.6, 9.2.8
Grundwissen Experimentalphysik, H. Pfeifer, H. Schmiedel, 21.2

Zubehör

Mikroskop, Objektmikrometer, Okularmikrometer, Spiegelaufsatz, beleuchtete Millimeterskale, Distanzstab, Glasquader, Fernrohr, Längenmaßstab

Schwerpunkte zur Vorbereitung

- Strahlengang und Bildentstehung bei Linsen, Fernrohren und im Mikroskop
- Vergrößerung optischer Instrumente
- Blenden im Strahlengang
- Auflösungsgrenzen eines Mikroskops

Bemerkungen zu den Aufgaben 1 bis 3 (Mikroskop)

Das zusammengesetzte Mikroskop besteht aus Objektiv und Okular mit jeweils positiver Brennweite. Das Mikroskopobjektiv entwirft vom Objekt ein reelles, entsprechend dem Abbildungsmaßstab γ_{ob} des Objektivs vergrößertes Zwischenbild, das mit dem als Lupe verwendeten Okular betrachtet wird. Die Gesamtvergrößerung Γ_M des Mikroskops ist also gleich dem Abbildungsmaßstab γ_{ob} des Objektivs multipliziert mit der Lupenvergrößerung Γ_{ok} .

$$\Gamma_M = \gamma_{ob} \Gamma_{ok} \quad (1)$$

Bei dem im Praktikum verwendeten Mikroskop können Objektiv und Okular näherungsweise als dünne Sammellinsen betrachtet werden.

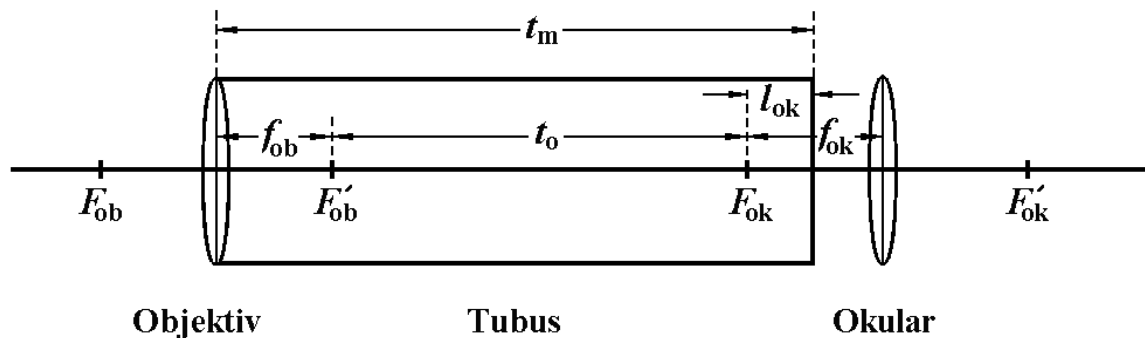


Abb.1 Charakteristische Abstände im Mikroskop

Den Abstand der einander zugekehrten Brennpunkte von Objektiv und Okular bezeichnet man als optische Tubuslänge t_o . Demgegenüber setzt sich die mechanische Tubuslänge aus der optischen Tubuslänge t_o , der Brennweite des Objektivs f_{ob} und dem Abstand zwischen der Objektiv- und Okularauflagefläche l_{ok} zusammen: $t_m = t_o + f_{ob} + l_{ok}$. Die Größe l_{ok} bezeichnet man auch als Abgleichlänge des Okulars. Die Mittelebene des Objektivs stimmt in guter Näherung mit der unteren Tubusanlagefläche überein. Für die Gesamtbrennweite f_M des Mikroskops (Zweilinsen-System) gilt dann:

$$\frac{1}{f_M} = \frac{1}{f_{ob}} + \frac{1}{f_{ok}} - \frac{d}{f_{ob} f_{ok}} \quad (2)$$

Hierin ist d der Linsenabstand mit $d = t_o + f_{ob} + f_{ok}$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{f_M} = - \frac{t_o}{f_{ob} f_{ok}} \quad (3)$$

Bezüglich der Vergrößerung des Mikroskops beobachtet man im Fall der Normalvergrößerung mit auf Unendlich akkommodierten Auge das Zwischenbild, das in der Brennebene des Okulars entsteht.

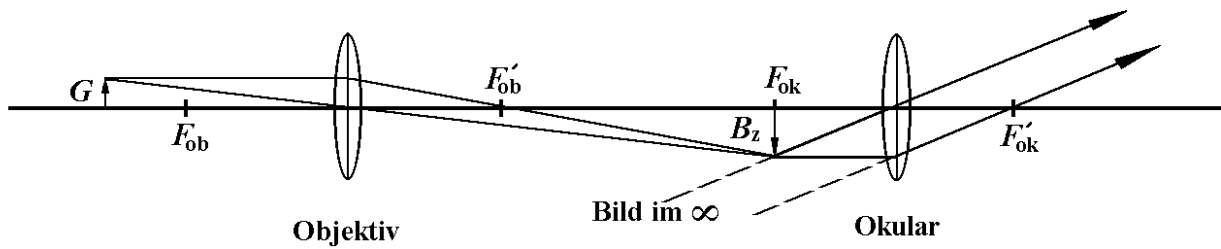


Abb.2 Strahlenverlauf im Fall der Normalvergrößerung

Das Zwischenbild entsteht im Abstand $b = t_o + f_{ob}$ vom Objektiv. Der Abbildungsmaßstab des Objektivs ergibt sich mit

$$\gamma_{ob} = \frac{b}{f_{ob}} - 1 = \frac{t_o}{f_{ob}} \quad (4)$$

Für die Normalvergrößerung Γ_{MN} des Mikroskops erhält man:

$$\Gamma_{MN} = \gamma_{ob} \Gamma_{okN} = \frac{t_o s}{f_{ob} f_{ok}} \quad (5)$$

Hierin ist Γ_{okN} die Normalvergrößerung des Okulars mit $\Gamma_{okN} = s/f_{ok}$.

Aufgabe 1: Als Gegenstand wird ein Objektmikrometer verwendet. Das Bild entsteht in der Brennebene des Okularmikrometers in einem Abstand von 19 mm über dem oberen Tubusrand und kann mit einer eingebauten Mikrometerschraube ausgemessen werden. Die Brennweite des Objektivs ist durch eine graphische Auswertung unter Verwendung von Gl.(4) zu bestimmen.

Aufgabe 2: Zur Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops wird unter Zuhilfenahme eines Spiegels mit einem Auge gleichzeitig sowohl das Objekt (Objektmikrometer) als auch eine Vergleichsskala in 250 mm Entfernung betrachtet. Sieht man durch geeignete Einstellung des Mikroskops beide Bilder scharf, so ist das beobachtende Auge auf die Entfernung von 250 mm akkommodiert. Das Endbild des Mikroskops entsteht dann ebenfalls im Abstand (Bildweite) von 250 mm vor dem Auge. Das reelle Zwischenbild entsteht innerhalb der einfachen Brennweite des Okulars im Abstand x von der Brennebene F_{ok} (vgl. Abb.3)

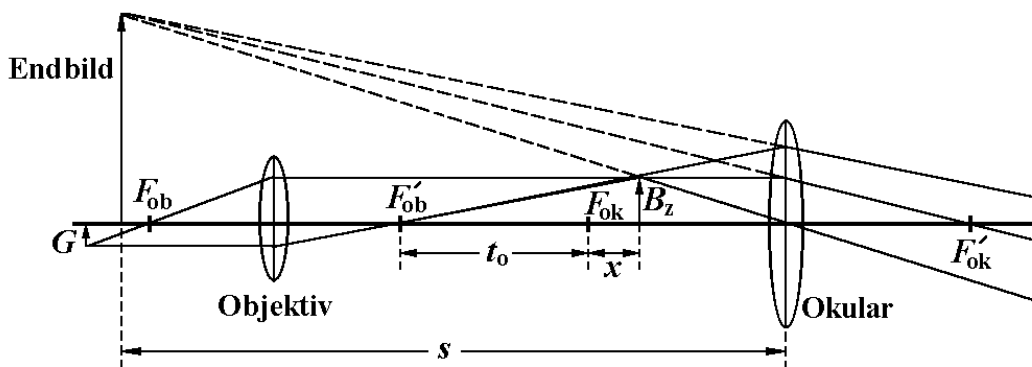


Abb.3 Zur Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops

Wie man in Abb.3 erkennt, entsteht das reelle Zwischenbild B_z in der Entfernung $b_{ob} = f_{ob} + t_o + x$ vom Objektiv. Damit gilt:

$$\gamma_{ob} = \frac{b_{ob}}{f_{ob}} - 1 = \frac{t_o + x}{f_{ob}} \quad (6)$$

Das Okular erzeugt vom reellen Zwischenbild, dessen "Gegenstandsweite" bezüglich des Okulars $f_{ok} - x$ beträgt, in einer Entfernung $s = 250$ mm (Bildweite) ein virtuelles Bild ($b = -s$). Man erhält aus der Linsengleichung

$$\frac{1}{f_{ok}} = \frac{1}{f_{ok} - x} - \frac{1}{s}, \quad x = \frac{f_{ok}^2}{s + f_{ok}} \quad (7)$$

Die Lupenvergrößerung des Okulars beträgt bei endlicher Bildweite

$$\Gamma_{ok} = \frac{s}{f_{ok}} + 1 \quad (8)$$

Damit ergibt sich für die Vergrößerung des Mikroskops nach Gl.(1) mit den Gln.(6), (7) und (8) sowie Gl.(4) für die Normalvergrößerung Γ_{MN}

$$\Gamma_M = \Gamma_{MN} + \frac{t_o}{f_{ob}} + \frac{f_{ok}}{f_{ob}} \quad (9)$$

Aus Gl. (9) erkennt man, dass die Vergrößerung eines Mikroskops bei fest vorgegebenen Objektiv- und Okularbrennweiten nur von der optischen Tubuslänge t_o abhängt. Optische und mechanische Tubuslänge unterscheiden sich lediglich durch eine additive Konstante:

$$t_o = t_m - f_{ob} - l_{ok} = t_m + c \quad (10)$$

Nach dem Einsetzen von Gl.(10) in Gl.(9) folgt

$$\Gamma_M = \frac{s + f_{ok}}{f_{ob} f_{ok}} t_m + c_1 \quad (11)$$

Die Konstante c_1 hängt nicht von t_m ab, so dass eine Auftragung von Γ_M als Funktion von t_m eine Gerade ergibt, aus deren Anstieg bei bekannter Objektivbrennweite die Okularbrennweite bestimmt werden kann.

Aufgabe 3: Zur Messung der numerischen Apertur legt man über ein auf dem Objektisch liegenden Maßstab (Strichabstand l) einen durchsichtigen quaderförmigen Körper bekannter Dicke a und bildet die Oberfläche des Quaders im Mikroskop scharf ab (vgl. Abb.4). Ohne die Mikroskopeinstellung zu ändern, wird das Okular aus dem Tubus genommen und dafür eine Lochblende an die Zwischenbildebene gebracht.

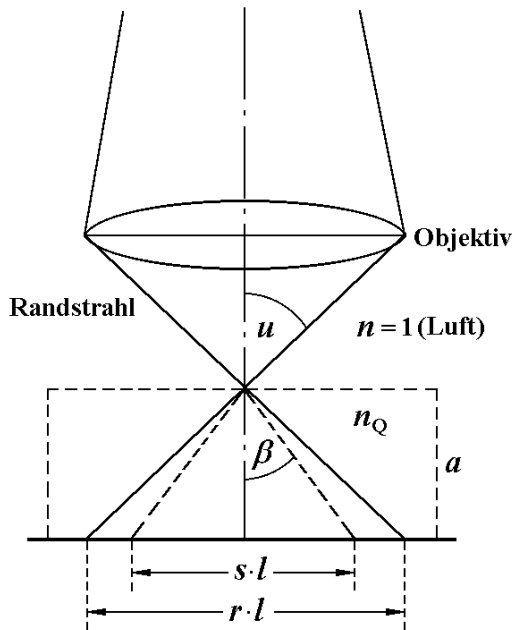
Durch das Loch sieht man dann das Bild von (s l) Teilstrichen bei aufliegendem Quader bzw. (r l) Teilstrichen nach Entfernen des Quaders. Für die Ermittlung der numerischen Apertur A geht man von der Definition $A = n \sin(u)$ aus. Mit

$$\tan(u) = \frac{rl}{2a}, \quad \sin(u) = \sqrt{\frac{\tan^2 u}{1 + \tan^2 u}}$$

ergibt sich die numerische Apertur zu

$$A = n \sqrt{\frac{r^2 l^2}{4a^2 + r^2 l^2}} \quad (12)$$

Abb.4 Zur Bestimmung der numerischen Apertur und der Brechzahl



Die Brechzahl n_Q des Quaders erhält man über das Brechungsgesetz:

$$n_Q = \frac{\sin(u)}{\sin(\beta)} = \sqrt{\frac{r^2(4a^2 + s^2 l^2)}{s^2(4a^2 + r^2 l^2)}} \quad (13)$$

Bemerkungen zu den Aufgaben 4 bis 6 (Fernrohr)

Betrachtet man durch ein optisches Instrument ein Objekt, so wird man nur einen (kreisförmigen) Teil des für das freie "unbewaffnete" Auge sichtbaren Gebietes erblicken, d.h. das Instrument begrenzt das Gesichtsfeld. Das ist eine Folge der in den Instrumenten vorhandenen Blenden, wobei schon die Linsenfassungen als Blenden wirken. Unter dem scheinbaren Gesichtsfeldwinkel $2\sigma'$ versteht man denjenigen Sehwinkel, unter dem man einen solchen Gegenstand sieht, der gerade das ganze Gesichtsfeld ausfüllt, unter dem wahren Gesichtsfeld-Winkel 2σ den Sehwinkel, unter dem man den gleichen Gegenstand ohne Instrument sieht. Der hier eingeführte Winkel 2σ entspricht dem Winkel α im Praktikumsbuch 'Physikalisches Praktikum'.

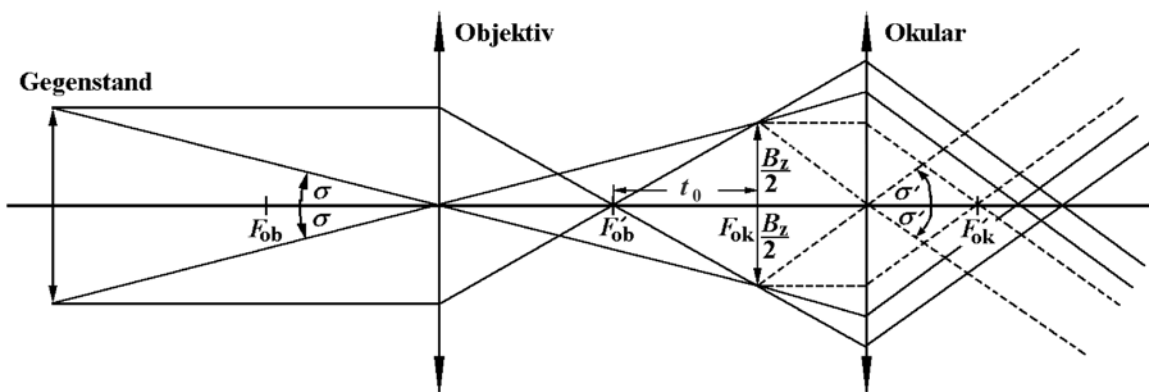


Abb.5 Strahlengang beim astronomischen Fernrohr

Misst man für verschiedene Winkel σ (innerhalb des Gesichtsfeldes) die Größe B_z des Zwischenbildes (vgl. Abb.5), so gilt für ein astronomisches Fernrohr bei teleskopischem Strahlengang

folgende Beziehung:

$$\tan \sigma = \frac{B_z}{2f_{\text{ob}}} \quad \text{bzw.} \quad \tan \sigma' = \frac{B_z}{2f_{\text{ok}}} \quad (14)$$

In unserem Fall befindet sich der Gegenstand in endlicher Entfernung, so dass das Zwischenbild im Abstand $f_{\text{ob}} + t_0$ hinter dem Objektiv entsteht (Abb.5). Die Größe t_0 nennt man optische Tubuslänge. Es gelten somit folgende Beziehungen:

$$\tan \sigma = \frac{B_z}{2(f_{\text{ob}} + t_0)} \quad \text{bzw.} \quad \tan \sigma' = \frac{B_z}{2f_{\text{ok}}} \quad (15)$$

Die Objektivlinse erzeugt bei einer Gegenstandsweite g vom Gegenstand G das Zwischenbild B_z .

Aus den beiden Gleichungen $\frac{B_z}{G} = \frac{b}{g}$ und $\frac{1}{f_{\text{ob}}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ folgt

$$G = \left(\frac{g}{f_{\text{ob}}} - 1 \right) B_z \quad (16)$$

Misst man für mehrere Gegenstandsgrößen G die Bildgröße B_z und trägt G über B_z auf, so erhält man bei vorgegebener Gegenstandsweite g die Brennweite f_{ob} aus dem Anstieg des Graphen. Die optische Tubuslänge t_0 erhält man mittels der Gleichung

$$t_0 = b - f_{\text{ob}} = f_{\text{ob}} \left(\frac{g}{g - f_{\text{ob}}} - 1 \right) \quad (17)$$

Der Zahlenwert $(d_{\text{AP}}/\text{mm})^2$ mit der Austrittspupille d_{AP} heißt "geometrische Lichtstärke" L_s . Reflexionen an den Glasflächen werden dabei nicht berücksichtigt.¹ Für die Berechnung der Lage der Austrittspupille ist die erforderliche Beziehung selbst abzuleiten.²

¹ In der Technik werden Ferngläser durch zwei als Produkt, z. B. 7 x 50, eingravierte Zahlen gekennzeichnet. Die Angabe 7 x 50 bedeutet ein Fernglas mit $F=7$ und einem Objektivdurchmesser (Eintrittspupille) von 50 mm. Der Durchmesser der Austrittspupille ist also $50\text{mm} : 7 = 7,15\text{ mm}$ und die geometrische Lichtleistung (Lichtstärke) $(7,15)^2 = 51$.

² Beim astronomischen Fernrohr (ohne zusätzliche Blenden) wirkt der Objektivrand (Gegenstand G_{ob} =Linsenfassung vom Objektiv) als Eintrittspupille. Das Okular entwirft davon hinter dem Fernrohr ein umgekehrtes, reelles Bild B_{ob} ("Okularkreis" = Austrittspupille). Wegen der "teleskopischen (telemetrischen) Folge" der Linsen, d.h., die einander zugekehrten Brennpunkte von Objektiv und Okular fallen zusammen (optische Tubuslänge $t_0 = 0$), ergibt sich mit der Abbildungsgleichung für das auf unendlich eingestellte astronomische Fernrohr die Berechnungsgleichung für d_{AP} .