M 12 Gekoppelte Pendel

Aufgaben

1. Messen Sie für drei verschiedene Befestigungen der Kopplungsfeder längs der Stabachsen der Pendel die Schwingungsdauer T_1 der gleichsinnigen Schwingung, die Schwingungsdauer T_2 der gegensinnigen Schwingung, die Schwingungsdauer T bei Schwebungsschwingungen und die Schwebungsdauer T_S !

2. Ermitteln Sie T und T_S durch Rechnung aus T_1 und T_2 und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den gemessenen Werten !

3. Berechnen Sie den Kopplungsgrad k für die drei Befestigungen der Kopplungsfeder aus T_1 und T_2 sowie aus den gemessenen Werten T und T_S ! Vergleichen und diskutieren Sie die Genauigkeit der Ergebnisse !

4 Untersuchen Sie den Einfluss der Befestigungen der Kopplungsfeder auf das Verhältnis der Schwingungsdauern von gleich- und gegensinniger Schwingung! Messen Sie hierzu analog zur *Aufgabe 1* für weitere Stellungen der Feder die Schwingungsdauern T_1 und T_2!

Zusatzaufgabe: Überprüfen Sie, ob das Direktionsmoment der Feder viel kleiner ist als die Direktionsmomente der Pendel! Messen Sie die Überlagerung von Schallwellen, und diskutieren Sie die beobachteten Effekte im Vergleich zu den gekoppelten Pendeln!

Zubehör

Gekoppelte Pendel, Messplatz mit Interface und PC

Grundlagen

<u>Gekoppelte Pendel:</u>
Zwei physikalische Pendel 1 und 2, die identisch und elastisch gekoppelt sind (hier mit einer Schraubenfeder)

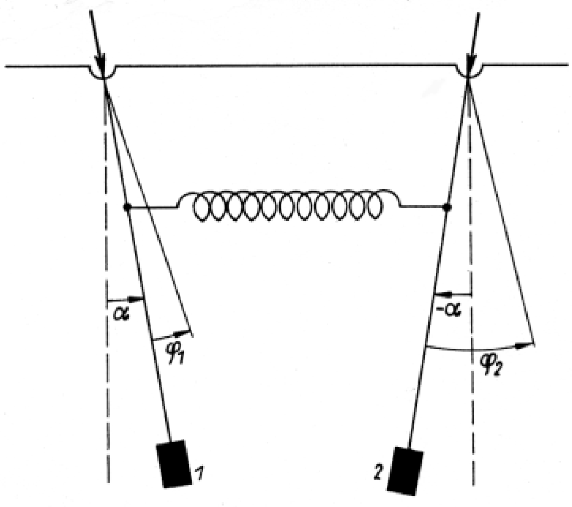


Abb.1 Gekoppelte Pendel

Herleitung der Bewegungsgleichungen nach dem Praktikumsbuch "Physikalisches Praktikum", 12. Auflage, Hrsg. D. Geschke, B. G. Teubner Stuttgart.

Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\varphi_1 = 1/2\left[a_1\cos(\omega_1 t) + b_1\sin(\omega_1 t) + a_2\cos(\omega_2 t) + b_2\sin(\omega_2 t)\right]$$

$$\varphi_2 = 1/2\left[a_1\cos(\omega_1 t) + b_1\sin(\omega_1 t) - a_2\cos(\omega_2 t) - b_2\sin(\omega_2 t)\right]$$

mit $\omega_1 = 2\pi/T_1 = +[D/I]^{1/2}$, Gl. (1.1)

$\omega_2 = 2\pi/T_2 = +\left[\left(D+2D^*\right)/I\right]^{1/2}$. Gl. (1.2)

Damit ergeben sich für die drei Spezialfälle folgende Bewegungsgleichungen:

a) <u>Gleichsinnige Schwingungen</u> (1. Fundamentalschwingung mit ω_1)

<u>Anfangsbedingungen:</u> $\varphi_1(t=0) = \varphi_2(t=0) = \varphi_0$, $\mathrm{d}\varphi_1/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_2/\mathrm{d}t = 0$ für $t=0$
Mit $a_1 = 2\varphi_0, b_1 = a_2 = b_2 = 0$ folgt $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0\cos\omega_1 t$
(identischePendelschwingungen).

b) <u>Gegensinnige Schwingungen</u> (2. Fundamentalschwingung mit ω_2)

<u>Anfangsbedingungen:</u> $\varphi_1(t=0) = \varphi_0$, $\varphi_2(t=0) = -\varphi_0$, $\mathrm{d}\varphi_1/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_2/\mathrm{d}t = 0$ für $t=0$
Mit $a_2 = 2\varphi_0$, $a_1 = b_1 = b_2 = 0$ folgt $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0\cos\omega_2 t$.

Beide Pendel schwingen mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Pendelschwingungen beträgt 180 °.

<u>c) Schwebungsschwingungen</u>

<u>Anfangsbedingungen:</u> $\varphi_1(t=0) = 0$, $\varphi_2(t=0) = \varphi_0$, $\mathrm{d}\varphi_1/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_2/\mathrm{d}t = 0$ für $t=0$
Daraus folgt $\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \varphi_0\sin\left[1/2(\omega_2-\omega_1)\,t\right]\ \sin\left[1/2(\omega_2+\omega_1)\,t\right]$

und $\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \varphi_0\cos\left[1/2(\omega_2-\omega_1)\,t\right]\ \cos\left[1/2(\omega_2+\omega_1)\,t\right]$.

Beide Pendel schwingen mit der Kreisfrequenz $\omega = 1/2(\omega_2+\omega_1)$,
$T = 2\pi/\omega = 4\pi/(\omega_2+\omega_1)$ bzw. mit der Periodendauer $T = 2/(1/T_2 + 1/T_1)$:

$$1/T = 1/2(1/T_2 + 1/T_1) \quad . \qquad \text{Gl. (2)}$$

Die Amplituden $\varphi_0\sin\left[1/2(\omega_2-\omega_1)\,t\right]$ und $\varphi_0\cos\left[1/2(\omega_2-\omega_1)\,t\right]$ ändern sich periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega_S = 1/2\,(\omega_2-\omega_1)$, wobei sich die Schwingung der

Amplitude (Schwebung) schon nach $T_S = \pi / \omega_S$ wiederholt (T_S Schwebungsdauer, $\omega_1 = 2\pi / T_1$, $\omega_2 = 2\pi / T_2$).

Der Schwebungsdauer entspricht die Zeitdauer zwischen zwei Stillständen von Pendel 1 oder Pendel 2 $\left[1/2\left(\omega_2 - \omega_1\right) T_S = \pi\right]$. Es folgt $T_S = 1/\left(1/T_2 - 1/T_1\right)$ bzw.

$$1/T_S = 1/T_2 - 1/T_1 \quad . \qquad \text{Gl. (3)}$$

Der Kopplungsgrad wird als

$$k = D^* / \left(D + D^*\right) \qquad \text{Gl. (4)}$$

definiert. Für kleine Kopplungen ist das Direktionsmoment der Feder D^* klein gegen das des Pendels D. Mit den Gleichungen (1) ergibt sich

$$k = \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) / \left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right) = \left(T_1^2 - T_2^2\right) / \left(T_1^2 + T_2^2\right) \quad . \qquad \text{Gl. (5)}$$

Messergebnisse

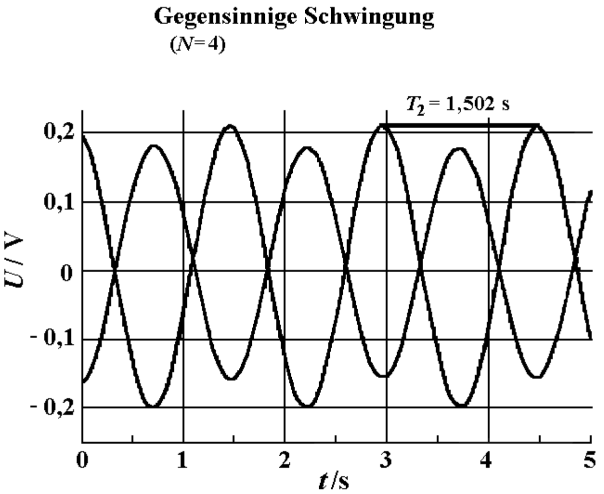
Messung mit Cassy – System (Periodendauermessung mit Cursor), Pendel III und IV, Kopplungsfeder Nr. 5

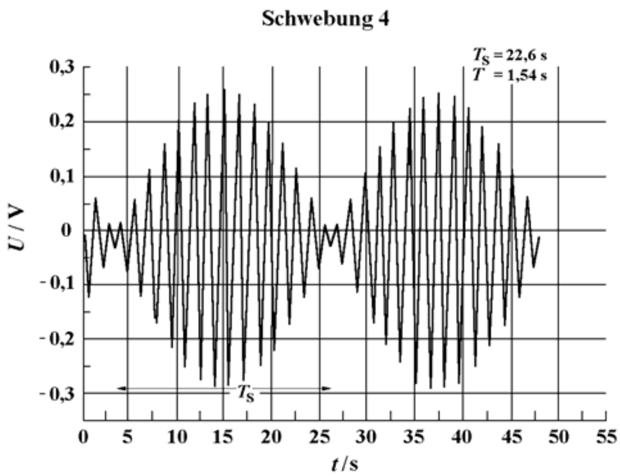
gleichsinnige Schwingung: (N Nummer der Federbefestigung, Pendel IV)

N	1	2	3	4	5	6
T_1 / s	1,614	1,615	1,611	1,611	1,611	1,614

gegensinnige Schwingung:

N	1	2	3	4	5	6
T_2 / s	1,584	1,563	1,525	1,502	1,464	1,433





Schwebung:

N	1	2	3	4	5	6
T / s	1,599	1,565	1,563	1,540	1,530	1,500
T_S / s	88,6	50,1	32,4	22,6	16,4	12,9

Auswertung

T', T_S' aus T_1 und T_2 berechnen mit den Gln. (2) und (3)

Vergleich zwischen gemessenen (T) und berechneten (T') Werten

N	1	2	3	4	5	6
T / s	1,60	1,57	1,56	1,54	1,53	1,50
T'/ s	1,60	1,59	1,57	1,56	1,53	1,52

Vergleich zwischen gemessenen (T_S) und berechneten (T_S') Werten

N	1	2	3	4	5	6
T_S / s	88,6	50,1	32,4	22,6	16,4	12,9
T_S' / s	85,2	48,5	28,6	22,4	16,0	12,8

Die größten relativen Abweichungen (Differenzen) betragen etwa 4 % für (T, T') und etwa 13 % für (T_S, T_S').

Vergleich der Schwingungsdauern der beiden Pendel bei gegensinniger Schwingung

N	1	2	3	4	5	6
T_2^{III}/s	1,5863	1,5625	1,5263	1,5025	1,4650	1,4350
T_2^{IV}/s	1,5825	1,5625	1,5238	1,5025	1,4628	1,4313
$\Delta T_2/s$	0,0038	0	0,0025	0	0,0022	0,0037

- max. Differenz $\Delta T_2 < 0{,}004$ s (0,3%)
- Abweichungen klein, d. h., die gegenseitige Pendelauslenkung kann per Augenmaß vorgenommen werden

Berechnung der Kopplungsgrade k (T_1, T_2) nach Gl. (5)

$$k = \left(T_1^2 - T_2^2\right) / \left(T_1^2 + T_2^2\right)$$

und $k'(T, T_S)$ nach Gl. (6). Aus $k = D^*/(D + D^*)$ und den Gln. (3) und (4) erhält man nach Umstellung und Substitution

$$k' = \left(4 T_S T\right) / \left(T^2 + 4T_S^2\right) \approx T / T_S \quad . \qquad \text{Gl. (6)}$$

Wegen $T \ll T_S$ kann in guter Näherung die vereinfachte Gleichung (6) verwendet werden.

Vergleich der Kopplungsgrade k nach Gl. (5) und k' nach Gl. (6)

N	1	2	3	4	5	6
k	0,0188	0,0327	0,0548	0,0693	0,0954	0,1184
k'	0,0180	0,0312	0,0482	0,0681	0,0933	0,1163
$\Delta(k, k')$	0,0008	0,0015	0,0066	0,0012	0,0021	0,0021
$\Delta(k, k')/k$	4,3 %	4,6 %	12,1 %	1,7 %	2,2 %	1,8 %

Differenz $\Delta\left(k, k'\right) = \left|k - k'\right|$

Messunsicherheiten

Aus dem Vergleich von Mehrfachmessungen bei verschiedenen Federpositionen ergaben sich folgende Messunsicherheiten:

$$u(T_1) = 0{,}004\ \text{s}\ \ ,\ \ u(T_2) = 0{,}012\ \text{s}\ \ ,\ \ u(T) = 0{,}006\ \text{s}\ \ ,\ \ u(T_S) = 0{,}016\ \text{s}\ .$$

<u>Größtfehlerabschätzung zur Bestimmung der Messunsicherheit des Kopplungsgrades für *N* = 4</u>

$$\begin{aligned} u(k) &= \left|\mathrm{d}k/\mathrm{d}T_1\right|\ u(T_1) + \left|\mathrm{d}k/\mathrm{d}T_2\right|\ u(T_2) \\ &= 4T_1 \cdot T_2^2 / \left(T_1^2 + T_2^2\right)^2 u\left(T_1\right) + 4T_2 / \left(T_1^2 + T_2^2\right)\ u\left(T_2\right) \\ &= \left[0{,}62\ \ u\left(T_1\right) + 1{,}24\ \ u\left(T_2\right)\right]\ \text{s}^{-1} =\ 0{,}017 \qquad (14\ \%) \end{aligned}$$

$$k_4 = (0{,}07 \pm 0{,}02)$$

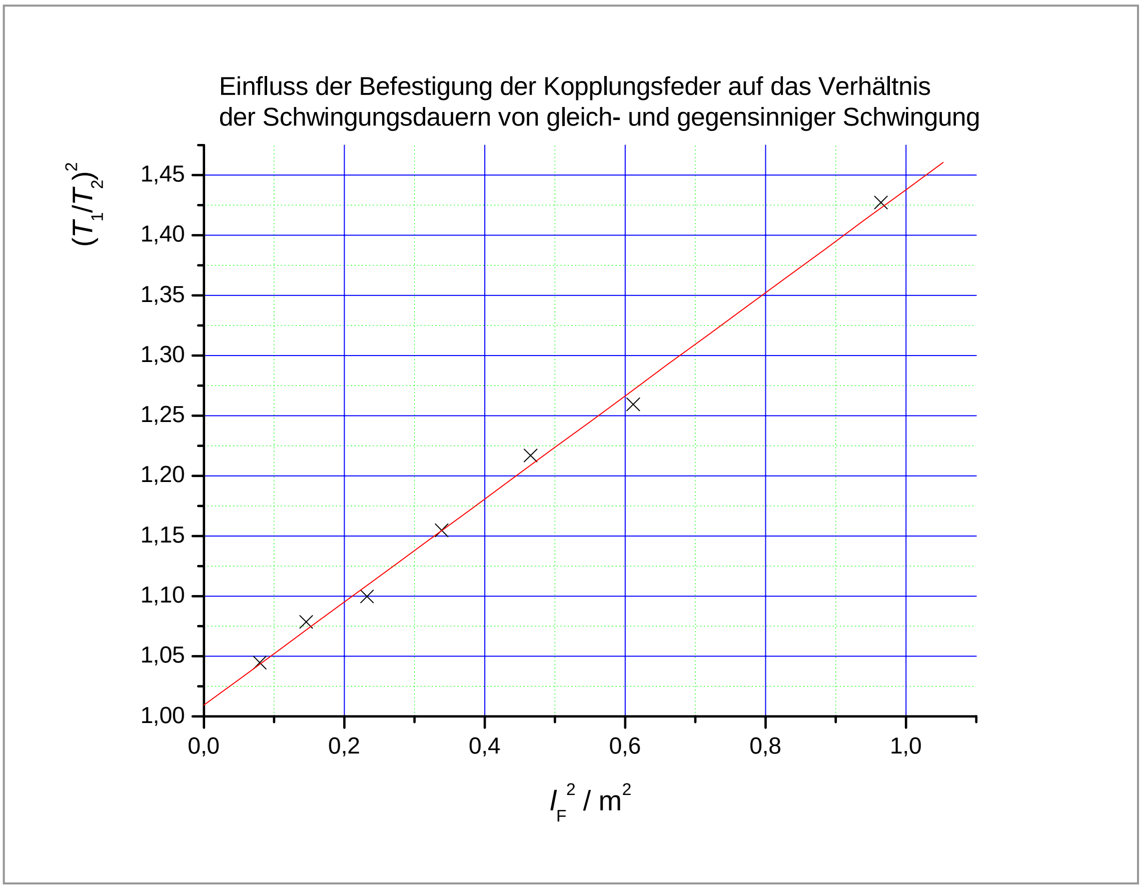
Der Wert für die abgeschätzte maximale Messunsicherheit $u(k)$ übertrifft die größte Differenz zwischen den Werten k und k'.

Die Konsistenz der Werte der verschiedenen Kopplungsschwingungen werden in den Grenzen der Messunsicherheiten gut erfüllt.

Die Messergebnisse zeigen weiterhin:

Die Schwingungsdauer T_1 bei gleichsinniger Schwingung ist wie erwartet unabhängig von der Position der Kopplungsfeder.

Die Schwingungsdauer T_2 bei gegensinniger Schwingung wird bei größerem Abstand zwischen Drehachse und Federposition kleiner, da das von der Feder auf das Pendel ausgeübte Direktionsmoment ($D^* \sim x$) um so stärker auf das Pendel wirkt, je größer die mittlere Auslenkung x der Feder, also je weiter unten die Feder am Pendel befestigt ist.
Die Abhängigkeit $\left(T_1/T_2\right)^2$ von l_F^2, wobei l_F der Abstand zwischen der Drehachse des Pendels und dem Befestigungspunkt der Feder ist, zeigt das erwartete lineare Verhalten: $\left(T_1/T_2\right)^2 = 1 + 2\dfrac{c\, l_F^2}{D}$.



Über den Anstieg der Regressionsgeraden B = 0,432 m^{-2} und mit der Gleichung B=2c/D erhält man das Verhältnis von Federkonstante c zum Direktionsmoment D des Pendels. Unter Berücksichtigung der gegebenen Masse des Pendels m = 1,293 kg und den durch Ausbalancieren ermittelten Schwerpunkt des Pendels s_A = 0,58 m ergibt sich mit dem Direktionsmoment D (D=mgs_A= 7,36 Nm) ein Wert für die Federkonstante c=1,59 Nm^{-1}. Die direkte Messung der Federkonstante mittels statischer Methode (s. Versuch ″Torsionsmodul-Statische Methode″) ergab einen Wert von 1,50 Nm^{-1}, was einer relativen Abweichung von ca. 5% entspricht und im Bereich der abgeschätzten Messunsicherheiten liegt.