Grafische Darstellung und Auswertung ('Ausgleichsgerade')

Die Präsentation und die Überprüfung oder Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit zwischen verschiedenen Messgrößen erfolgt im Physikpraktikum in der Regel durch grafische Darstellungen. Damit können qualitative Zusammenhänge unmittelbar verdeutlicht werden. Obwohl im Praktikum die theoretischen Zusammenhänge meist bekannt sind, ist es doch häufig von Vorteil, dass man eine experimentelle Überprüfung von Beziehungen oder die indirekte Bestimmung von Größen überwiegend mit Hilfe grafischer Darstellungen durchführt.

Oft wird es bei den Auswertungen im Praktikum darum gehen, die Abhängigkeit der Messdaten x und y von zwei Größen X und Y linear zu beschreiben, d. h. sie genügen einer Geradengleichung vom Typ $Y = A + B\ X$. Wenn der theoretisch zu erwartende Zusammenhang nichtlinear ist, so wird es doch in den meisten Fällen möglich sein, diesen durch geeignete mathematische Transformationen in eine Geradengleichung zu überführen:

<u>Beispiel</u> Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität η

Die Messgrößen sind die dynamische Viskosität und die Temperatur.

$\boxed{\eta = \eta_0\ \mathrm{e}^{\frac{E_A}{RT}}}$ Materialkonstante η_0, Aktivierungsenergie E_A, absolute Temperatur T, allgemeine Gaskonstante R

Die Überführung in eine Geradengleichung vom Typ $Y = A + B\ X$ durch Logarithmieren ergibt

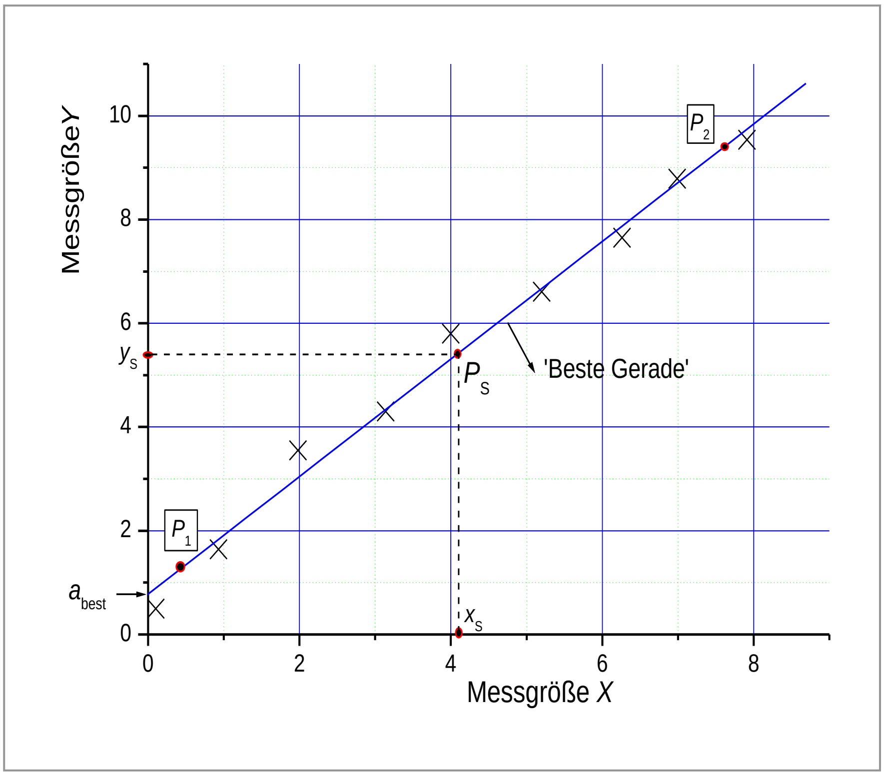
$\ln\eta = \ln\eta_0 + \frac{E_A}{R}\frac{1}{T}$ mit den Variablen $X = \frac{1}{T}, Y = \ln\eta$ und den Geradenparametern

$A = \ln\eta_0, B = \frac{E_A}{R}$.

Um die Werte a und b der beiden Geradenparameter A und B zu bestimmen, die ihrerseits eine naturwissenschaftliche, technische oder medizinische Bedeutung haben können, versucht man rechnerisch oder grafisch deren ‚beste' Werte zu ermitteln. Der rechnerische Weg basiert auf der Methode der linearen Regression, die voneinander unabhängige und zufällig streuende Messwerte voraussetzt. Der ihr zugrunde liegende mathematisch-statistische Algorithmus wird in zahlreichen Büchern beschrieben und die entsprechenden Rechnungen sind heute problemlos mit geeigneten Taschenrechnern oder mit Hilfe kommerzieller Software durchführbar. Eine einfache und schnelle Bestimmung der Geradenparameter, ohne die Voraussetzung statistischer Datensätze erfüllen zu müssen, bietet die Methode des grafischen Ausgleichs. Dazu legt man die Gerade so über die Daten, dass diese eine bestmögliche Anpassung erreicht.

Man stellt die Messwerte (x_i, y_i) der Messgrößen X und Y zunächst in einem geeigneten Koordinatensystem dar (Abb. 1), wobei der Maßstab der Koordinatenachsen so zu wählen ist, dass die zu erwartende Gerade einen Anstieg von etwa 45 ° (bzw. 135 °) aufweist. Damit erreicht man beim Ablesen von Koordinatenwerten der Abszisse und der Ordinate vergleichbare relative Ableseunsicherheiten.

Abb. 1 Darstellung von zwei Messgrößen X und Y, die durch einen linearen Zusammenhang dargestellt werden können, zur Ermittlung der Besten Geraden



Für das Einzeichnen der optimalen Geraden als 'Beste Gerade' oder 'Ausgleichsgerade' in das Diagramm, das man auch als grafischen Ausgleich bezeichnet, gibt es einige praktische Regeln:

- Man verwendet einen durchsichtigen Maßstab, um beim Einzeichnen der besten Geraden im Mittel die Summe der Abweichungen zwischen den Messpunkten und der Geraden auszugleichen, d. h., die Summe der Abweichungen soll möglichst null werden.
- Die Endpunkte sind nicht zu überschätzen, da sie oft ungenauer sind als die anderen Punkte.
- Der Schwerpunkt P_S der Geraden (Abb. 1) liegt bei den arithmetischen Mittelwerten ($\bar{x} = x_S, \bar{y} = y_S$) der x- und y-Werte.
- Es ist günstig, insbesondere für die Fehlerermittlung bei der grafischen Anpassung, die mittleren Fehler (Messabweichungen) der einzelnen Messwerte einzuzeichnen.
- Falls die erwartete Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft, ist dieser ein Fixpunkt für die Geradenkonstruktion.

Der Schnittpunkt der besten Geraden mit der *Y*-Achse ergibt den Wert a_{best}. Den optimalen Anstieg der besten Geraden b_{best} erhält man aus dem Anstiegsdreieck von zwei geeigneten Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$, die ausreichend weit voneinander entfernt sein sollen, um eine möglichst große Genauigkeit zu erreichen. Man erhält dann b_{best} mit

$$\boxed{b_{best} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \, .$$

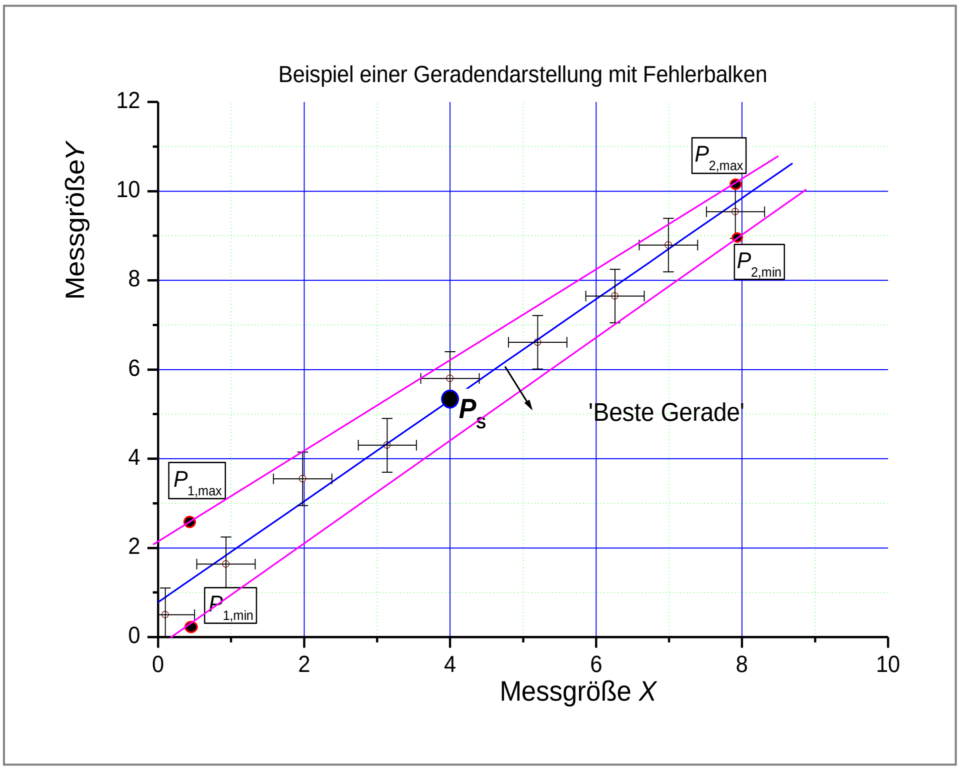


Abb. 2 Beispiel einer Geradendarstellung mit Fehlerbalken für die *x*- und *y*-Messwerte

Um die Unsicherheit des Geradenanstiegs zu ermitteln, verwendet man die in Abb. 2 markierten Punkte $P_{1,min}$ und $P_{1,max}$ sowie $P_{2,min}$ und $P_{2,max}$. Der maximale Wert für den Anstieg ergibt sich nach der Gleichung $\boxed{b_{max} = \frac{y_{2,max} - y_{1,min}}{x_{2,max} - x_{1,min}}}$

und der minimale Anstieg nach der Gleichung

$$\boxed{b_{min} = \frac{y_{2,min} - y_{1,max}}{x_{2,min} - x_{1,max}}} \, .$$

Häufig wird man $b_{max} \cong b_{min}$ setzen können, so dass sich aus der Differenz $|b_{best} - b_{max}|$ ein guter Schätzwert für die maximale Unsicherheit des Anstiegs mit $u(b)_{max} = |b_{best} - b_{max}|$ bestimmen lässt. Als Ergebnis der graphischen Methode der Bestimmung des Anstiegs erhält man dann

$$\boxed{B = b_{best} \pm u(b)_{max}} \, .$$