Zur Ermittlung von Messunsicherheiten

Eine physikalische Messung liefert immer einen Wert, der vom Erwartungswert μ (‘wahrer Wert’) der physikalischen Größe mehr oder weniger abweicht. Deshalb muss in Wissenschaft und Technik die Angabe eines Messwertes immer mit der Angabe der Messabweichung oder der Messunsicherheit[2] erfolgen.” Das Messergebnis, d. h. der Messwert einer Einzelmessung oder der Mittelwert einer Messreihe, enthält den berichtigten (korrigierten) Wert verbunden mit einem Intervall, in dem vermutlich der Erwartungswert der Messgröße liegt.

Die Differenz zwischen der oberen Grenze dieses Intervalls und dem berichtigten Wert bzw. die Differenz zwischen dem berichtigten Wert und der unteren Grenze dieses Intervalls nennt man Messunsicherheit (abgekürzt mit u). In der Regel haben die beiden Differenzen den gleichen Wert. Zur Messunsicherheit können sowohl systematische als auch zufällige Abweichungen beitragen. Nach der Deutschen Norm DIN 1319 von 1995 wurde der traditionelle Begriff 'Messfehler' durch den Begriff 'Messabweichung' bzw. seine Kurzform 'Abweichung' ersetzt. Bei Kalibrierungsmessungen hoher Genauigkeit sind systematischen Abweichungen in der Regel vernachlässigbar.

Das dem ISO/BIPM-Leitfaden zu Grunde liegende Konzept zur Ermittlung der Messunsicherheit, z. B. ′Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen′ (ISO, ′Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement′, kurz GUM, ISO International Organization of Standardization), ′Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement′, International Bureau of Weights and Measures (BIPM, http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf , http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_104_2009_E.pdf), verwendet nicht mehr die Kategorie ′systematische Abweichung′. In diesem Leitfaden werden die Messunsicherheiten in zwei verschiedene Typen aufgeteilt, Typ A und Typ B.

Unsicherheiten vom Typ A beziehen sich auf mehrfach wiederholte Messungen von (unkorrelierten) Zufallsmessgrößen und können mit mathematisch statistischen Methoden berechnet werden (z. B. die Standardabweichung als Standardunsicherheit). Die Messunsicherheiten vom Typ B stammen aus anderen Quellen. Sie können nicht durch mehrfach wiederholte Messungen ermittelt werden. Für ihre wissenschaftliche Beurteilung sind alle verfügbaren Informationen über mögliche Abweichungen bei der Erfassung der Messwerte zu berücksichtigen. Dazu zählen u. a. die Erfahrung oder allgemeines Wissen über das Verhalten oder die Eigenschaften der relevanten Materialien, Phänomene und Instrumente, Spezifikationen und Herstellerangaben, Daten aus Kalibrierungs- oder anderen Zertifikaten und Informationen über Unsicherheiten, die Handbüchern entnommen werden können.

Weitere Hinweise zur Bestimmung der Messunsicherheit können z. B. auch dem Fachbeitrag der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) Braunschweig von W. Kessel entnommen werden, http://www.ptb.de/de/publikationen/download/pdf/kessel.pdf.

Die Ermittlung von Messunsicherheiten für die bei einem Praktikumsversuch erhaltenen Ergebnisse ist ein wichtiger Bestandteil der Versuchsauswertung. Ausführliche Darstellungen dazu findet man z. B. im Praktikumsbuch "Physikalisches Praktikum", B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig, ab 10. Auflage (Herausgeber D. Geschke) oder in der im Anhang aufgeführten Literatur.

Bei Einzelmessungen berücksichtigen wir im Physikpraktikum neben den zufälligen Messabweichungen auch die systematischen Abweichungen. Systematische Abweichungen können jedoch prinzipiell vermieden werden, was aber in der Regel sehr arbeits- und kostenaufwendig ist.

Die zufälligen Messabweichungen im Physikpraktikum, z. B. die Zählrate bei radioaktiven Zerfallsprozessen, lassen sich mit den Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch beschreiben und sind prinzipiell nicht zu vermeiden. Für die systematischen Messabweichungen ist dagegen charakteristisch, dass sie auch bei Wiederholung der Messung unter gleichen Bedingungen konstant bleiben. Ihre Ursachen liegen z. B. in der fehlerhaften Kalibrierung, der ungenauen Nullpunkteinstellung oder der systematischen Beeinflussung der verwendeten Messgeräte durch die Nichteinhaltung von Nennbedingungen. Systematische Abweichungen können auch durch die Verwendung von Berechnungsgleichungen auftreten, wenn deren Voraussetzungen für ihre Gültigkeit eingeschränkt sind (z. B. auftretende Wärmeverluste bei kalorimetrischen Experimenten, bei Schwingungsexperimenten die Vernachlässigung von Reibungseinflüssen, u. a.).

Bekannte systematische Abweichungen werden grundsätzlich korrigiert. Sie sind bezüglich ihres Betrags und ihres Vorzeichens erfassbare (berechenbare, durch zusätzliche Messungen bestimmbare) Abweichungen, die durch Anbringen einer Korrektion an den Messwert zu berücksichtigen sind (z. B. Widerstandsbestimmungen mit strom- oder spannungsrichtiger Messung, Druckkorrektion bei Hg-Barometern, Temperaturkorrektion von Dichtewerten).

1 Messunsicherheit bei einer direkten Messgröße ('Größtfehlerabschätzung')

Jede 'Fehlerbetrachtung' im Physikpraktikum soll zumindest die Abschätzung der maximalen Messunsicherheit, auch 'Größtfehlerabschätzung' genannt, einschließen. Unter der maximalen Messunsicherheit (Größtfehler oder Maximalfehler) versteht man die größtmögliche, d. h. die unter ungünstigsten Umständen auftretende Abweichung einer Messgröße oder eines Ergebnisses vom Erwartungswert. Mit der Abschätzung der maximalen Messunsicherheit kann man die Größenordnung der mit einem bestimmten Messverfahren bzw. einer speziellen Messmethode erreichbaren Genauigkeit grob abschätzen.

Wird in einem Praktikumsversuch der Wert einer Messgröße X nur einmal gemessen, so erfolgt die vereinfachte Abschätzung der Unsicherheit aus der unbekannten systematischen $\delta_s(X)$ und der zufälligen $\delta_z(X)$ Messabweichung als Maximalwert der Unsicherheit $u_{max}(X)$ durch die lineare Addition beider Anteile:

$$u_{\max}(X) = \delta_{\mathrm{s}}(X) + \delta_{\mathrm{z}}(X) \ . \qquad (1a)$$

Die zufälligen Abweichungen werden bei Einzelmessungen basierend auf der Erfahrung des Praktikanten und unter Berücksichtigung der Anzeige- und Ablesegenauigkeiten und ggf. zufälliger Einflüsse auf die Messbedingungen abgeschätzt. Unter der Voraussetzung, dass die unbekannte systematische Abweichung mit der Messunsicherheit vom Typ B (siehe oben) verträglich ist, wird man die Unsicherheit mittels geometrischer Addition abschätzen:

$$u(X) = \sqrt{\delta_\mathrm{s}(X)^2 + \delta_\mathrm{z}(X)^2} \quad . \tag{1b}$$

Der Vergleich der Gln.(1a) und (1b) führt zu der Ungleichung

$$\sqrt{\delta_\mathrm{s}(X)^2 + \delta_\mathrm{z}(X)^2} < \delta_\mathrm{s}(X) + \delta_\mathrm{z}(X) \,.$$

2 Messunsicherheit einer indirekten Messgröße - kombinierte Messunsicherheit

Bei physikalischen Messungen wird oft aus einer Reihe von direkt gemessenen Größen X_1, X_2, X_3,... eine indirekte Größe $Y = Y(X_1, X_2, X_3,...)$ bestimmt. Die Messunsicherheit dieser indirekten Messgröße kann im Physikpraktikum unter der Voraussetzung ausreichend kleiner Messunsicherheiten $u(X_k)$ der Messgrößen ($u(X_k)/|X_k| < 0{,}1$ mit $k = 1,2,3,..., m$) als maximale Messunsicherheit mit der vereinfachten linearen Gleichung

$$u(Y)_\mathrm{max} = \left|\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right| u(X_1) + ... + \left|\frac{\partial Y}{\partial X_m}\right| u(X_m) \tag{2}$$

ermittelt werden. Dabei sind die $\partial Y/\partial X_m$ die partiellen Ableitungen von $Y = Y(X_1, X_2, X_3, ...)$ nach den Größen X_1, X_2, X_3, ...

In Analogie zu den oben genannten Empfehlungen des ISO/BIPM-Leitfadens, dass die zu berücksichtigenden Messunsicherheiten vom Typ A oder vom Typ B sind, wird die (kombinierte) Messunsicherheit mit

$$u(Y)_\mathrm{c} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_k}\right)^2 u(X_k)^2} \;. \tag{3}$$

ermittelt. Der in Gl.(3) beschriebene Zusammenhang wurde früher auch als ′Fehlerfortpflanzungsgesetz nach *Gauß*′ bezeichnet, und die Werte von $u(X_k)$ entsprechen experimentellen Standardunsicherheiten s_{X_k} (siehe Abschn. 3).

Die folgenden Sonderfälle ergeben für die Abschätzung der Messunsicherheit indirekter Messgrößen (kombinierte Messunsicherheit) besonders anschauliche und einfach zu handhabende Zusammenhänge:

Lineare Funktion

$$Y = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k X_k \,, \tag{4}$$

$$u(Y)_\mathrm{max} = |a_1|\; u(X_1) + ... + |a_m|\; u(X_m) \,, \tag{4a}$$

$$u(Y) = \sqrt{a_1^2\; u(X_1)^2 + ... + a_m^2\; u(X_m)^2} \;. \tag{4b}$$

Potenzprodukt

$$Y = A + \prod_{k=1}^{m} c_k X_k^{a_k} \,, \tag{5}$$

relative Unsicherheit

$$\frac{u(Y)_{\max}}{|Y|}=\left|a_1\frac{u(X_1)}{X_1}\right|+\ldots+\left|a_m\frac{u(X_m)}{X_m}\right|, \qquad (5a)$$

$$\frac{u(Y)}{|Y|}=\sqrt{\left(a_1\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2+\ldots+\left(a_m\frac{u(X_m)}{X_m}\right)^2}\ . \qquad (5b)$$

Beispiele

1. Dichtebestimmung eines zylindrischen Stabs (Masse *m*, Radius *R*, Länge *l*)

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi R^2 l} \qquad \text{Messunsicherheiten: } u(m), u(R), u(l)$$

$$u(\rho)_{\max}=\left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|u(m)+\left|\frac{\partial\rho}{\partial R}\right|u(R)+\left|\frac{\partial\rho}{\partial l}\right|u(l)==\left|\frac{1}{\pi R^2 l}\right|u(m)+\left|\frac{-2\,m}{\pi R^3 l}\right|u(R)+\left|\frac{-\,m}{\pi R^2 l^2}\right|u(l)$$

Größtfehler (relativ) $\frac{u_{\max}(\rho)}{\rho}=\frac{u(m)}{m}+\frac{u(l)}{l}+2\frac{u(R)}{R}$

(nach ISO/BIPM-Leitfaden)

$$u(\rho)_{\mathrm{c}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2u(m)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)^2u(R)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)^2u(l)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\pi R^2 l}\right)^2u(m)^2+\left(\frac{-2\,m}{\pi R^3 l}\right)^2u(R)^2+\left(\frac{-\,m}{\pi R^2 l^2}\right)^2u(l)^2}$$

$$\frac{u(\rho)_{\mathrm{c}}}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2+\left(2\frac{u(R)}{R}\right)^2+\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2}$$

2. Bestimmung der mittleren spezifischen Wärmekapazität c_{f} eines festen Stoffes über den Austausch von Wärmeenergie in einem wassergefüllten Kalorimeter (s. ”Physikalisches Praktikum“, Hrsg. D. Geschke).

Messgrößen
- Temperatur des erhitzten festen Stoffes ϑ_{f}
- Wassertemperatur vor Wärmeaustausch ϑ_{fl}
- Wassertemperatur nach Wärmeaustausch (Mischungstemperatur) ϑ_{m}
- Masse des Wassers im Kalorimeter m_{fl}
- Masse des festen Stoffes m_{f}
- Wärmekapazität des Kalorimeters C_{K}
- Spezifische Wärmekapazität von Wasser c_{fl} , $u(c_{\mathrm{fl}})$ vernachlässigbar

Berechnungsgleichung $c_f=\frac{(c_{\mathrm{fl}}\,m_{\mathrm{fl}}+C_{\mathrm{K}})\,(\vartheta_{\mathrm{m}}-\vartheta_{\mathrm{fl}})}{m_{\mathrm{f}}\,(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{m}})}$

Größtfehler

$$u(c_f)_{\max}=\frac{(\vartheta_{\mathrm{m}}-\vartheta_{\mathrm{fl}})}{m_{\mathrm{f}}\,(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{m}})}\left[c_{\mathrm{fl}}\,u(m_{\mathrm{fl}})+u(C_{\mathrm{K}})+\frac{(c_{\mathrm{fl}}\,m_{\mathrm{fl}}+C_{\mathrm{K}})}{m_{\mathrm{f}}}u(m_{\mathrm{f}})\right]+$$
$$\frac{(c_{\mathrm{fl}}\,m_{\mathrm{fl}}+C_{\mathrm{K}})}{m_{\mathrm{f}}\,(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{m}})}\left[u(\vartheta_{\mathrm{fl}})+\frac{(\vartheta_{\mathrm{m}}-\vartheta_{\mathrm{fl}})}{(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{m}})}u(\vartheta_{\mathrm{f}})+\frac{(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{fl}})}{(\vartheta_{\mathrm{f}}-\vartheta_{\mathrm{m}})}u(\vartheta_{\mathrm{m}})\right]$$

3 Messunsicherheit bei Messreihen ('Statistische Fehlertheorie')

Zur Anwendung der statistischen Fehlertheorie müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Die Messgröße X kann beliebig oft unter gleichen Wiederholbedingungen ermittelt werden.
2. Die systematischen Messabweichungen sind korrigierbar bzw. vernachlässigbar.
3. Die Messwerte streuen zufällig um einen Erwartungswert.

Für eine vorliegende Messreihe mit den Werten $x_1, x_2, ..., x_n$ ist das arithmetische Mittel (Mittelwert) mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

einen guter Schätzwert für den Erwartungswert μ für nicht zu kleine n. Zur Ermittlung der Messunsicherheit der zufälligen Messgröße X bestimmt man die experimentelle (empirische) Varianz

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{7}$$

Ihre positive Quadratwurzel ergibt die experimentelle Standardabweichung einer Einzelmessung vom Stichprobenumfang n:

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{8}$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Standardunsicherheit ($u(X)=s_X$) und das gebräuchlichste Maß für die Streuung zufallsverteilter Messgrößen auf der Grundlage der Normalverteilung (Java Applet http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/os/vt-norm.html). Für $n \to \infty$ fallen 68 % aller Messwerte in den Bereich $\bar{x} \pm s$ (95,4 % in den Bereich $\bar{x} \pm 2s$).

Die experimentelle Standardabweichung des Mittelwerts ist gleich der experimentellen Standardabweichung der Einzelmessung geteilt durch die positive Wurzel aus der Gesamtzahl der Messungen:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{9}$$

Für die statistisch begründete Berechnung der Streuung der Messwerte um ihren Mittelwert ist das Konfidenzintervall (Vertrauensbereich) unter Berücksichtigung der Anzahl der Messungen und der festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit (Vertrauensniveau) mittels der so genannten t-Verteilung zu berücksichtigen.

Im Falle einer indirekten Messgröße $Y=Y(X_1, ..., X_m)$ kann die betreffende Standardabweichung s_Y nach der 'Fehlerfortpflanzung nach *Gauß*' bzw. nach der Empfehlung des ISO/BIPM-Leitfadens zur Berechnung der kombinierten Messunsicherheit mit der Gleichung

$$u(Y) = s_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1} s_{X_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_m} s_{X_m}\right)^2} \tag{10}$$

ermittelt werden. Voraussetzung für die Anwendung dieser Beziehung ist, dass die Messgrößen $X_1, ..., X_m$ nicht korreliert sind.

Beispiel: Ermittlung der Gitterkonstante g eines Reflexionsgitters

Messgrößen: Einfallswinkel α, Beugungswinkel β_k der k-ten Ordnung für eine gegebene Kalibrierungswellenlänge λ

$$g = \frac{k\,\lambda}{\sin\alpha - \sin\beta_k} \quad (\beta_k = \beta_{\max,k}).$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = k\,\lambda \frac{-\cos\alpha}{(\sin\alpha - \sin\beta_k)^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta_k} = k\,\lambda \frac{-(-\cos\beta_k)}{(\sin\alpha - \sin\beta_k)^2} \quad \text{folgt nach Gl.(10)}$$

$$u(g) = k\,\lambda \left\{ \left[\frac{\cos\alpha}{(\sin\alpha - \sin\beta_k)^2}\, u(\alpha) \right]^2 + \left[\frac{\cos\beta_k}{(\sin\alpha - \sin\beta_k)^2}\, u(\beta_k) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Die Standardunsicherheiten $u(\alpha)$ und $u(\beta)$ ergeben sich aus den experimentellen Standardabweichungen s_α und s_β. Die Werte sind in Bogenmaß zu berechnen.

4 Lineare Regression

Häufig werden Versuche durchgeführt, bei denen man Messreihen von zwei voneinander abhängigen Messgrößen X und Y aufnimmt, zwischen denen eine lineare Abhängigkeit der Form $Y=A+B\,X$ besteht (Regressionsparameter A, B). Dabei ist die abhängige Messgröße Y in jedem Falle eine Zufallsgröße, während die Einflussgröße X eine Zufallsgröße sein kann, aber nicht sein muss. Letzteres bedeutet, dass für einen festen Wert der Größe X die Größe Y verschiedene (zufallsverteilte) Werte annehmen kann. Mit Hilfe der linearen Regression kann statistisch gesehen die bestmögliche Gerade (Ausgleichsgerade) nach dem Prinzip der kleinsten Quadratfehlersumme (least square fit) bestimmt werden. Mit geeigneter Software, z. B. ORIGIN, erhält man neben den Mittelwerten für die Geradenparameter auch deren Standardabweichungen.

Mehr Hinweise und Rechenbeispiele zur Abschätzung von Messunsicherheiten findet man in der im Anhang angegebenen Literatur.

5 Ergänzungen

Bemerkungen zum Thema "Kalibrieren"

Im Zuge der weltweiten Einführung von Qualitätsmanagementnormen sind die Anforderungen an Mess- und Prüfmittel deutlich gestiegen. So setzt zum Beispiel die Zertifizierung nach DIN EN ISO 9000ff ein aktives Qualitätsmanagement voraus, in dem regelmäßig Kalibrierungen durchgeführt werden müssen. Unter Berücksichtigung des jeweiligen Umfelds erreicht man dadurch eine hohe Sicherheit der Messresultate und die Rückführbarkeit der Messwerte auf den nationalen Standard wird gewährleistet.

"Eichen" ist nicht gleich "Kalibrieren"!

"Kalibrieren" sind die Tätigkeiten, die unter vorgegebenen Bedingungen die gegenseitige Zuordnung zwischen den ausgegebenen Werten eines Messgerätes einer Messeinrichtung oder einen Referenzmaterial einerseits und dazugehörigen Werten einer durch ein Bezugsmaterial dargestellten Größe andererseits bestimmen.

1. Das Ergebnis einer Kalibrierung erlaubt die Schätzung der Messabweichungen des Messgerätes, der Messeinrichtung oder der Messverkörperung oder die Zuordnung von Werten zu Teilstrichen auf beliebigen Skalen.
2. Das Ergebnis einer Kalibrierung kann in einem Dokument festgehalten werden, das oft Kalibrierschein", "Kalibrierbericht" oder "Kalibrierzertifikat" genannt wird.
3. Vielfach wird das Ergebnis einer Kalibrierung als Korrektion oder "Kalibrierfaktor" oder in Form einer "Kalibrierkurve" angegeben. Der Begriff "Eichen" ist im offiziellen Sprachgebrauch auf das gesetzliche Messwesen beschränkt und bezeichnet amtliche Prüfungen nach dem Eichgesetz. Eine Eichung kann nur vom zuständigen Eichamt an eichfähigen Geräten durchgeführt werden (http://www.eichamt.de/).

DKD-Kalibrierung (Deutscher Kalibrierdienst
http://www.dkd.eu/

Die Kalibrierung erfolgt unter den bei der Deutschen Akkreditierungsstelle genannten Bedingungen. Der Kunde erhält ein Kalibrier-Zertifikat mit den Messwerten, der jeweiligen Messunsicherheit, Angabe des Kalibrier-Verfahrens, den Umgebungsbedingungen und ggf. besonderen Messbedingungen.

Normalverteilung

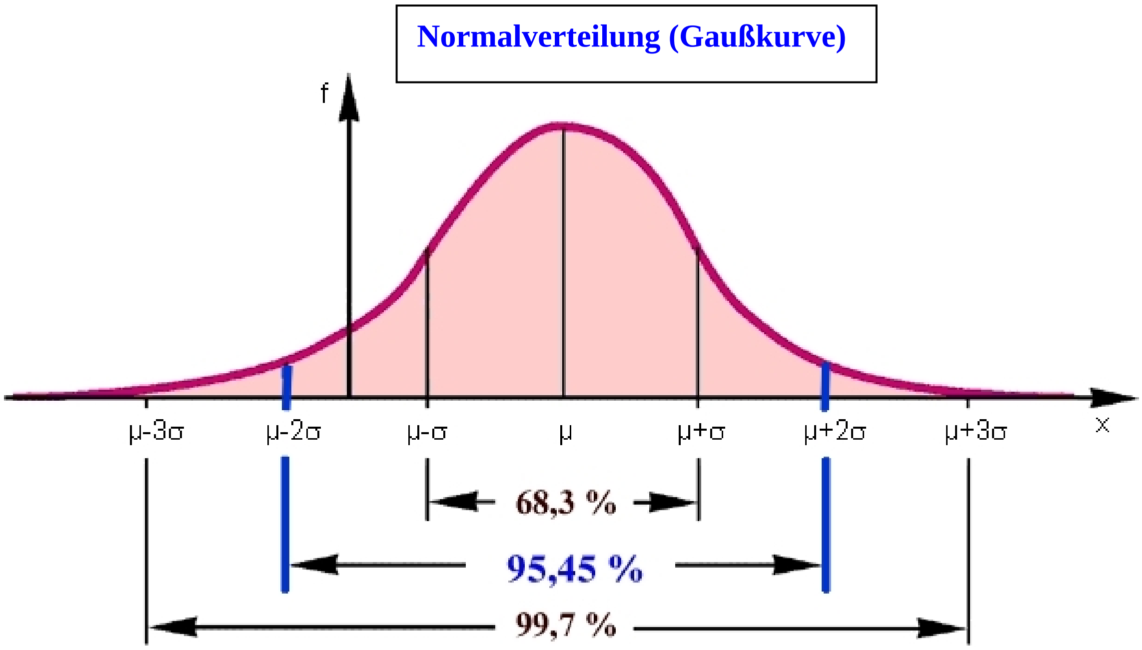
Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Intervall von von $\overline{x} - s$ bis $\overline{x} + s$ zu finden beträgt also 68.3 % für $n \to \infty$. In der praktischen Messtechnik bevorzugt man die drei folgenden Intervalle (Bereiche):

einfache Standardabweichung → von $\overline{x} - s$ bis $\overline{x} + s$ 68.3 %

zweifache Standardabweichung → von $\overline{x} - 2s$ bis $\overline{x} + 2s$ 95.5 %

dreifache Standardabweichung → von $\overline{x} - 3s$ bis $\overline{x} + 3s$ 99.7 %

Für eine kleine Zahl von Messwerten n ist üblicherweise ein Korrekturfaktor t notwendig, der sich aus der 'Student-Verteilung' bzw. 't-Verteilung' ergibt.



Literatur zum Thema 'Messunsicherheit'

DIN 1319-3
Grundlagen der Messtechnik - Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit, Beuth Verlag GmbH, Berlin Wien Zürich 1996

DIN 1319-4
Grundlagen der Messtechnik - Teil 4: Auswertung von Messungen; Messunsicherheit
Beuth Verlag GmbH, Berlin Wien Zürich 1996, National Institute of Standards and Technology (NIST)

Uncertainty of Measurement Results
Giudelines for the Expression of Uncertainty in Measurement, 1995
http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html

P.R. Bevington and D.K. Robinson
Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences
McGraw-Hill Book Co., New York 1994

Bundesanstalt für Materialforschung und –prüfung
Leitfaden zur Ermittlung von Messunsicherheiten bei quantitativen Prüfergebnissen BAM, Berlin 2004
http://www.bam.de/de/service/publikationen/publikationen_medien/leitfaden_messunsicherheit.pdf

Byron P. Roe
Probability and Statistics in Experimental Physics
Springer, Berlin 2001

Manfred Drosg
Der Umgang mit Unsicherheiten
Ein Leitfaden zur Fehleranalyse
Facultas, Wien 2006

W. H. Heini Gränicher
Messung beendet - was nun?
vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich und B.G. Teubner, Stuttgart 1996

Les Kirkup
Experimental Methods
An introduction to the analysis and presentation of data
John Wiley&Sons, 1994

Les Kirkup, Bob Frenkel
An Introduction to Uncertainty in Measurement
Cambridge University Press, New York 2006

P.R. Bevington and D.K. Robinson
Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences
McGraw-Hill Book Co., New York 1994

Louis Lyons
A practical Guide to
Data Analysis for Physical Science Students
Cambridge University Press, Cambridge 1991

G. L. Squires
Practical Physics
4th Edition, Cambridge University Press, Cambridge 2001