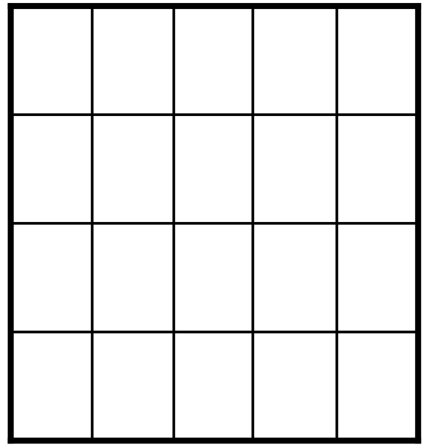
# Eine kleine Reise durch die Welt der zellulären Automaten

Wolfgang Oehme, Universität Leipzig

# 1. Einleitung

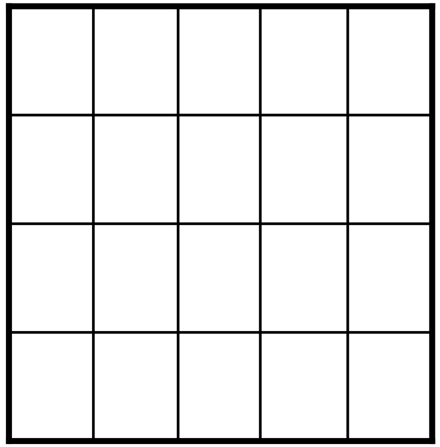


## Begriff des zellulären Automaten

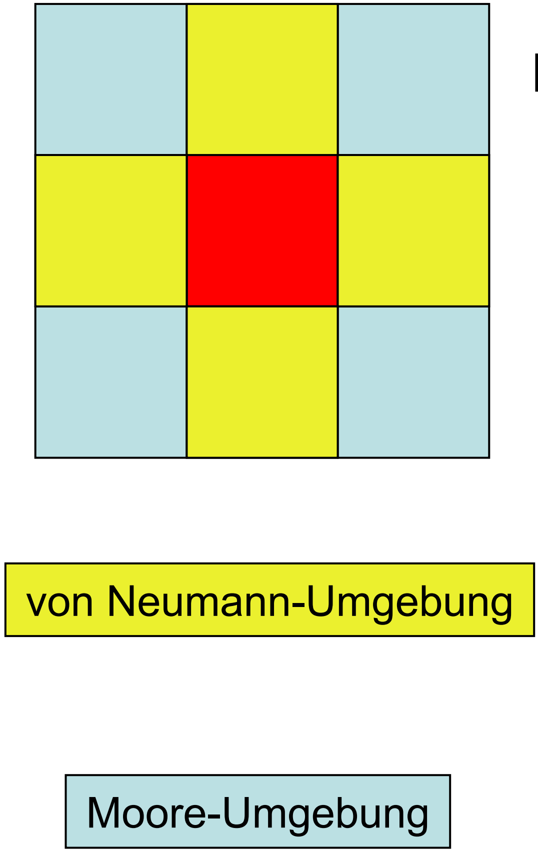
- Entwicklung in Raum und Zeit
- diskrete Menge zahlreicher Zellen
- endliche Anzahl möglicher Zustände der Zellen
- Zustandsänderung in diskreten Zeitschritten
- identische Zellen mit gleichen Entwicklungsregeln
- Entwicklung einer Zelle hängt von ihrem Zustand und dem der Zellen in unmittelbarer Nachbarschaft ab

# Konstruktion eines zellulären Automaten

- Zellraum
- Nachbarschaft (von  Neumann, Moore)
- Randbedingungen
- Zustandsmenge
- Zustandsentwicklung



# Blick auf zweidimensionale zelluläre Automaten (Beispiel)




Regeln: Bilde die Summe SN der Inhalte der vier Nachbarzellen.

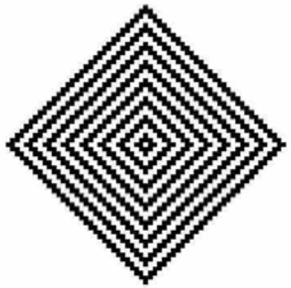
Vergleiche und entwickle:

1. Wenn eigener aktueller Zustand z(t)=1 und Summe SN=4, dann neuer Zustand z(t+1)=0.
2. Wenn eigener aktueller Zustand z(t)=0 und Summe SN=0, dann neuer Zustand z(t+1)=0.
3. Sonst neuer Zustand stets z(t+1)=1.

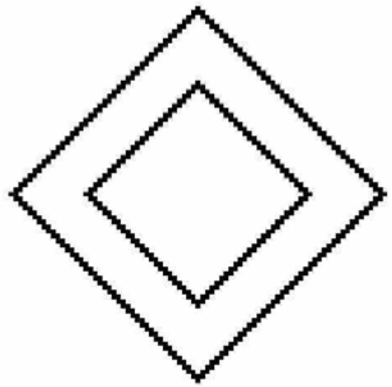
# Entwicklung

Ausgangszustand: Eine aktive Zelle im Zentrum.

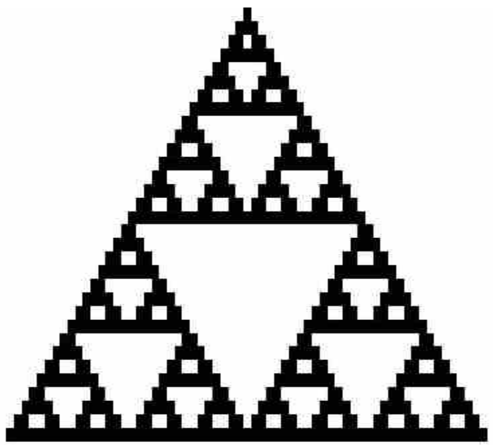
t=20



t=30



t=40



Schnittbild nach t=32

# 2.1. Game of Life

## Hintergründe zu Game of Life

- 1968 von John Horton Conway (Mathematiker) erfunden
- das Spiel erlangte schnell große Popularität (Höhepunkt in 70er und 80er Jahren)
- gilt als Klassiker aller Zellulären Automaten
- der Name „Game of Life“ symbolisiert den Überlebenskampf der Zellen im Automaten

# Game of Life –
# ein „einfacher“ Zellulärer Automat

„einfach“ weil:

- es nur 2 Zustände für jede Zelle gibt ( 0-tot, 1-lebendig)
- das Regelwerk des Spiels leicht zu durchschauen ist

Die Zellen befinden sich auf einem 2-dimensionalen
n × m Gitter

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • | • | • | • | • |
| | • | • | | • |
| | • | • | | • |
| • | | | | • |
| | | • | | |

So könnte ein LIFE-Spielbrett aussehen
( • - lebendige Zelle)

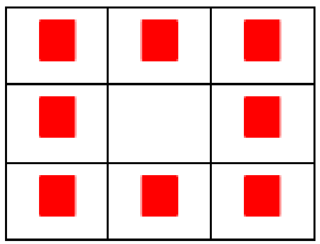
# Das Regelwerk von LIFE

Für Game of Life reichen 3 Regeln zur Beschreibung:

1. Eine „tote“ Zelle mit genau 3 lebendigen Nachbarn wird lebendig.
2. Eine „lebendige“ Zelle mit genau 2 oder genau 3 lebendigen Nachbarn bleibt am Leben.
3. In allen anderen Fällen stirbt die Zelle (an Vereinsamung oder Überbevölkerung).

Nachbarschaft in LIFE (■ = ein Nachbar):

*Moore*-Nachbarschaft

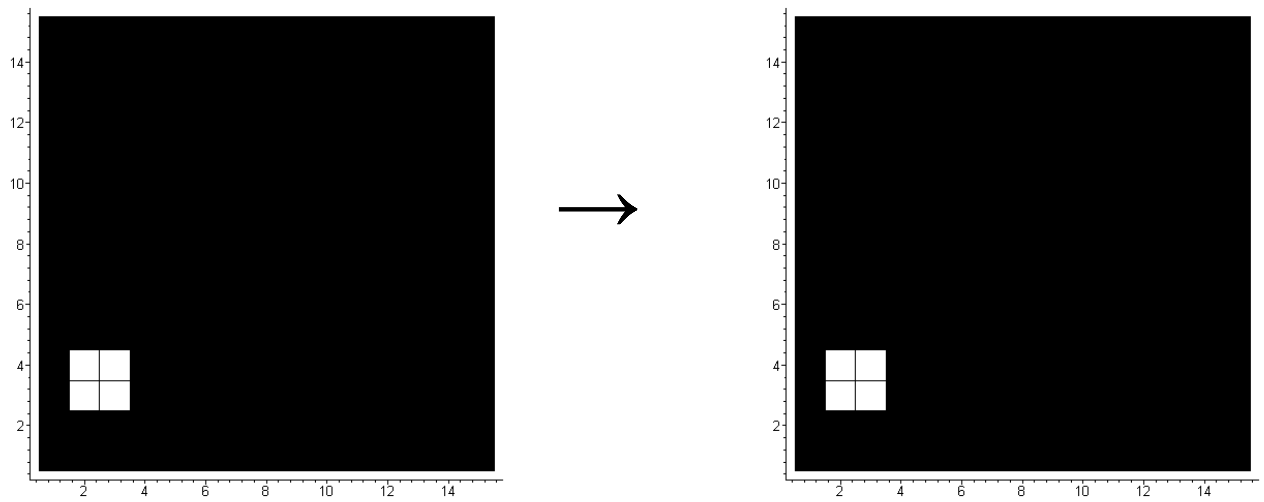


# Simulation von LIFE

Strukturen in LIFE

- statische Objekte
- periodische Objekte
- Gleiter
- monoton wachsende Populationen

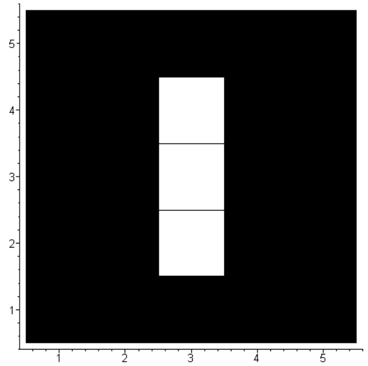
**Beispiel: 4-Block**




t = 0 → t = 1

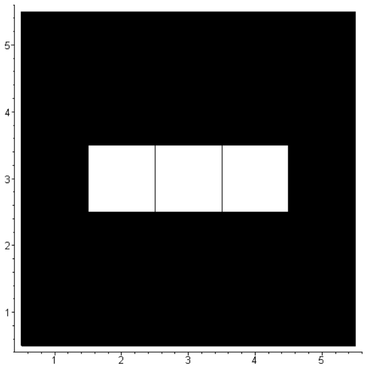
# Simulation von LIFE

## Blinker



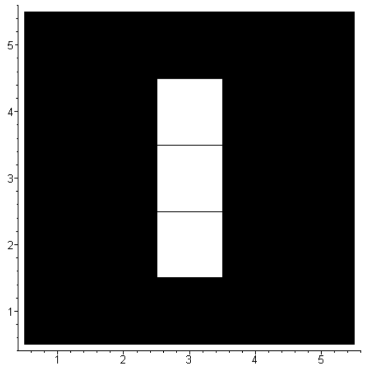
t = 0

→



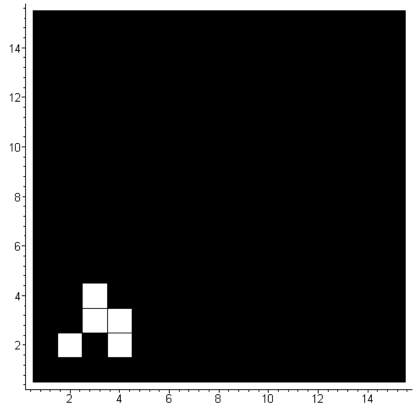
t = 1

→



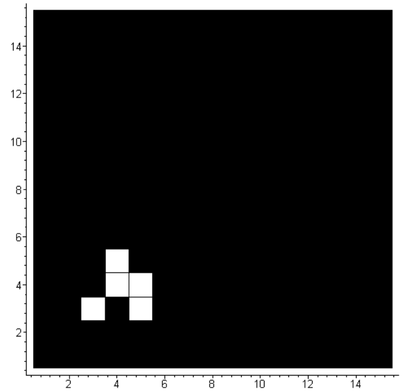
t = 2

## Gleiter



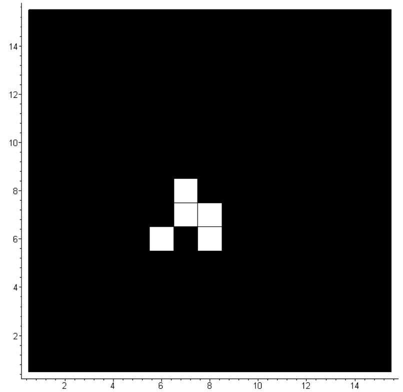
t = 0

→*



t = 4

→*



t = 16

# LIFE ist komplex

weil:

- die Anzahl der möglichen Zustandskombinationen des Zellulären Automaten beträgt bereits bei einem 5 × 5 Spielfeld

$$\boxed{\mathbf{2^{5*5}} = 2^{25} = 33.554.432}$$

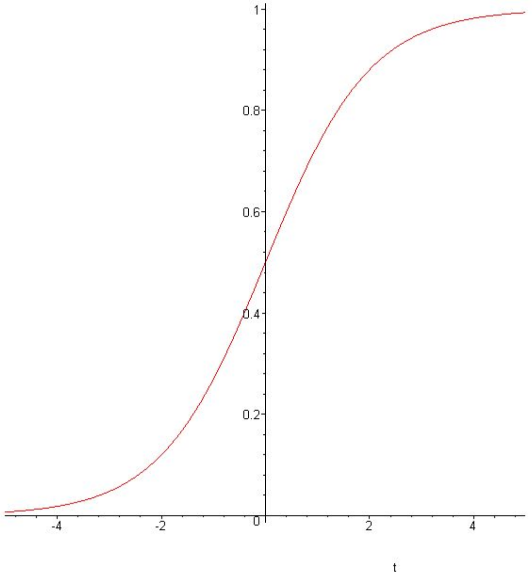
- nicht prognostizierbar ist, in welche „Richtung“ sich der Automat entwickelt.

- sich durch die vielen entdeckten Strukturen/Objekte in LIFE Interpretationen und Sichtweisen einzelner wissenschaftlicher Disziplinen entwickelt haben.

# 2.2. Populationsdynamik

## Verhulst-Dynamik

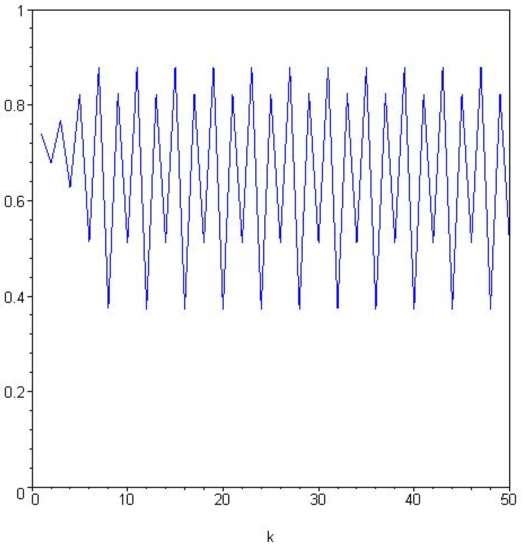
### Sigmoide

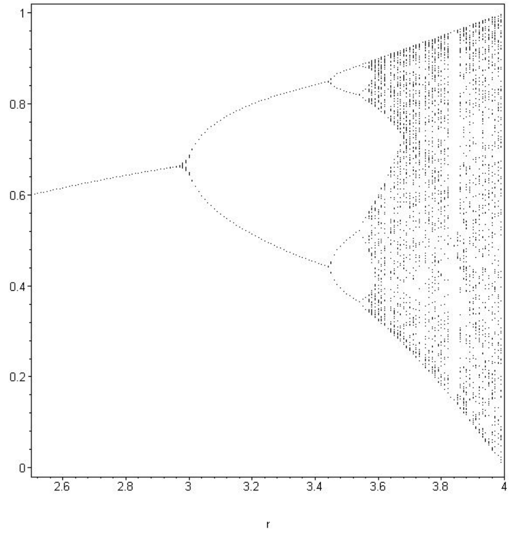



$$\dot{x} = k \cdot x \cdot (1 - x)$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp(-k \cdot (t - t_0))}$$

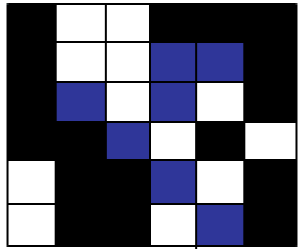
### Logistische Gleichung




$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) = r \cdot x_n - r \cdot x_n^2$$

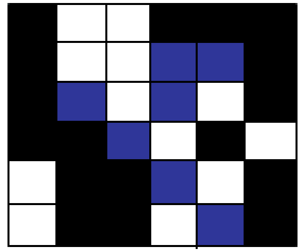
# Zellulärer Automat



- Regeln für Beute
  - ➢ Freies Feld in Nachbarschaft → auswählen und besetzen
  - ➢ mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit Nachwuchs in Ausgangsfeld werfen

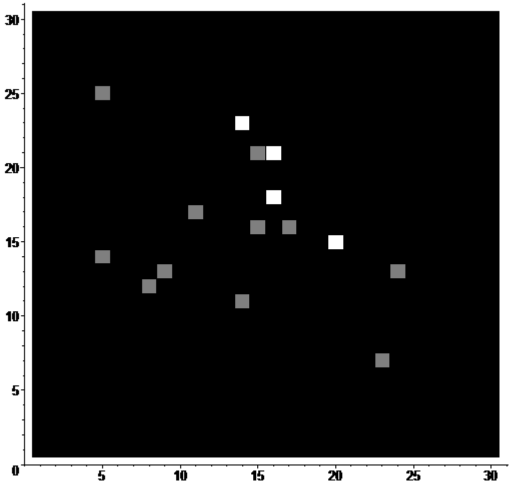
- Regeln für Räuber
  - ➢ Beute in Nachbarschaft → auswählen und fressen
  - ➢ mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit Nachwuchs in Ausgangsfeld setzen
  - ➢ Keine Beute in Nachbarschaft → leeres Feld auswählen und besetzen
  - ➢ Räuber stirbt mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit

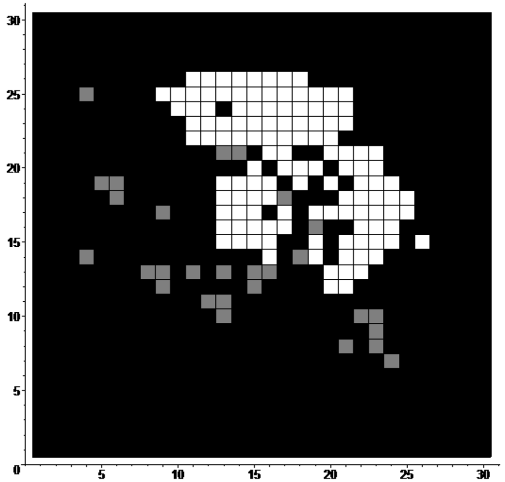
# Zellulärer Automat

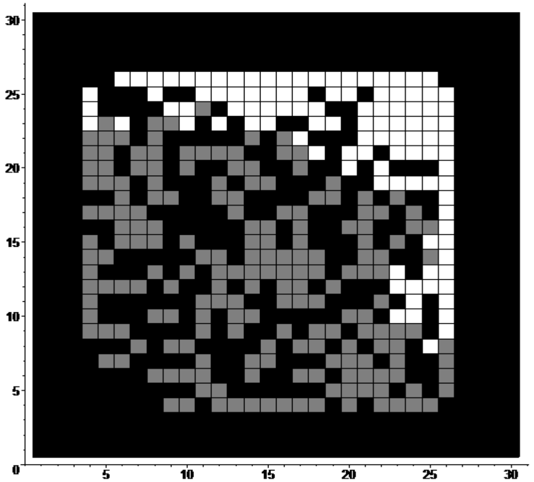


- Zeitentwicklung: (Beute – grau, Räuber – weiß)

| t=0 | t=6 | t=21 |
|---|---|---|
| x=11 | x=28 | x=192 |
| y=4 | y=123 | y=107 |



# 2.3. Vielseitigkeit zellulärer Automaten

## WaTor – Leben auf dem **Wa**sser-**Tor**us

- wurde 1984 entworfen
- ist die Simulation eines Räuber-Beute-Modells auf der Grundlage von Hai–Fisch-Interaktionen
- ist eine der populärsten Modellierungen von populationsdynamischen Prozessen in Zellulären Automaten

# Zustände und Regeln

**Zustände der Lebewesen:**

Hai: Laichalter und Hunger

Fisch: Laichalter

**Regeln für die Lebewesen:**

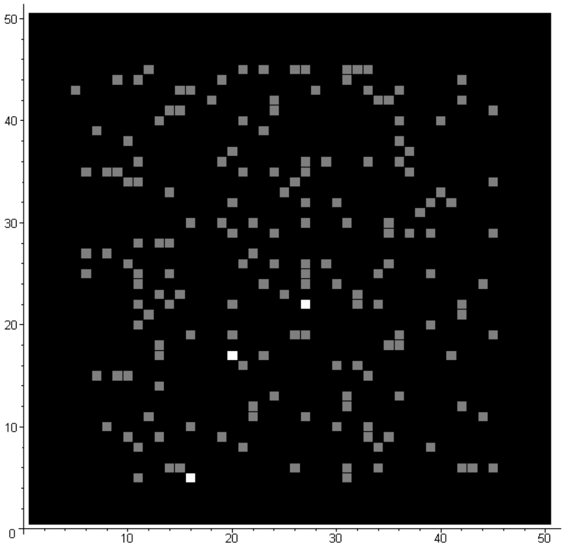
Hai: vermehrt sich ab gewissem Alter,
stirbt ab gewisser Hungergröße

Fisch: vermehrt sich ab gewissem Alter

# Weitere Regeln für den Automaten

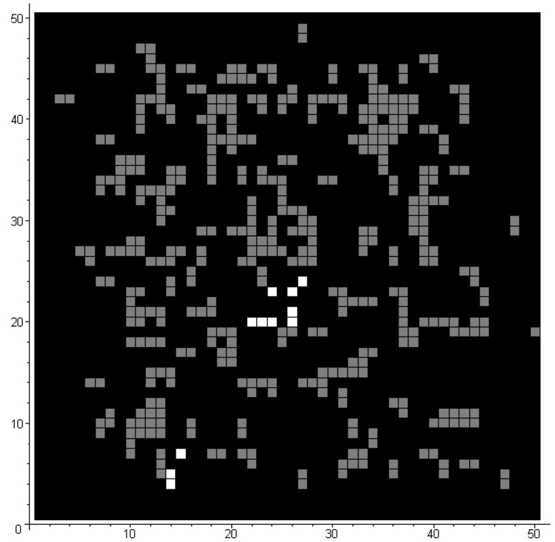
1. In jeder Zelle kann sich nur ein Fisch, ein Hai oder Wasser befinden.
2. Haie
   - fressen einen Fisch, wenn dieser in der Nachbarschaft liegt, und der Hunger wird auf Null gesetzt.
   - bewegen sich zufällig in freie Nachbarfelder, wenn kein Fisch in der Nähe ist. Gleichzeitig nimmt der Hunger zu.
   - sterben, wenn der Hunger zu groß ist.
3. Fische
   - bewegen sich zufällig in freie Nachbarfelder.
   - sterben, wenn sie von einem Hai gefressen werden.

# Simulation von WaTor

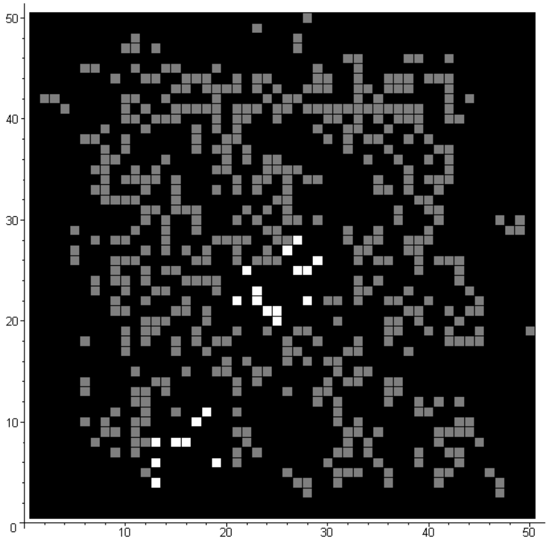



t = 0

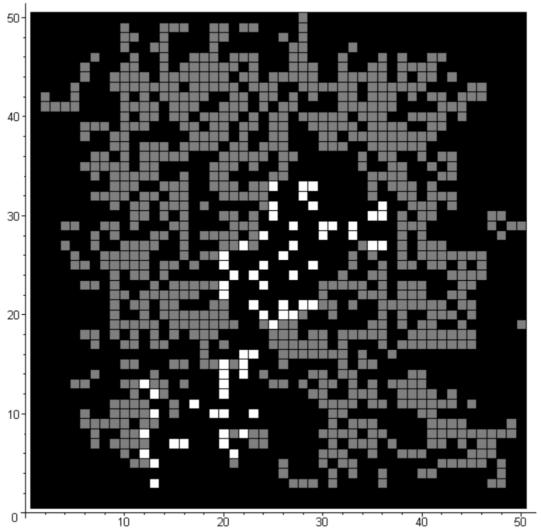
→




→




→



# Waldbrand

- Zustände und Regeln:

  3 Zustände: Baum, brennender Baum, Leerstelle

  Feste Regeln:

  - Baum wird durch brennenden Nachbarbaum entzündet
  - Bäume brennen eine Zeitperiode

  Zufall:

  - Blitzschlag in Baum
  - Neuwuchs an Leerstelle
- Randbedingungen: Fester Rand
- Anfangszustand: feste Vorgabe oder Zufallsbelegung

# Kooperation

- stellt eine Modellierung rationalen menschlichen Verhaltens dar
  - Sozialwissenschaftler nutzen diese Verfahren
- Beiträge aus der mathematischen Spieltheorie sichern Modell ab

  Menschen = Spieler, die Strategie verfolgen um maximalen Gewinn zu erzielen (Mittel: Kooperation oder Nicht-Kooperation)

  prominente Beispiele für solche „Spiele“:

    - Soziale Dilemmata
    - Das Gefangenendilemma

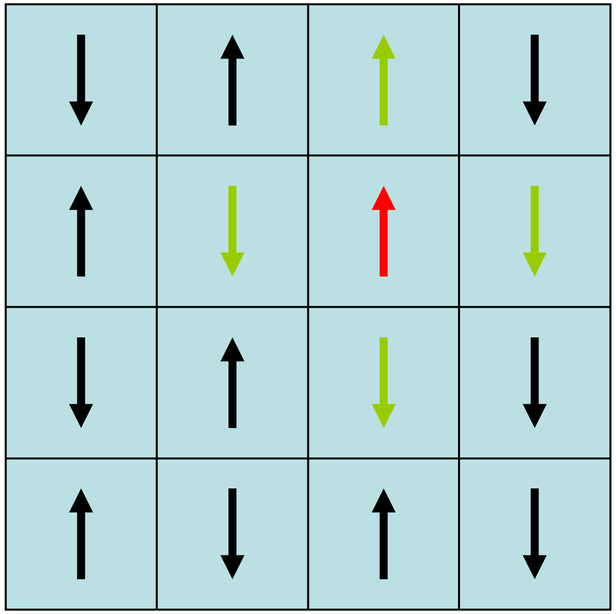
# Das Gefangenendilemma

- Rahmenstory bildet die Gefangennahme zweier Gesetzesbrecher, die auf frischer Tat ertappt wurden
- Polizei will, dass mehr gestanden wird
  → Einzelbefragung

| Gefangener 2<br>Gefangener1 | *kooperativ* | *unkooperativ* |
|---|---|---|
| *kooperativ* | 1 Jahr Haft<br>1 Jahr Haft | 0 Jahre Haft<br>5 Jahre Haft |
| *unkooperativ* | 5 Jahre Haft<br>0 Jahre Haft | 4 Jahre Haft<br>4 Jahre Haft |

→ „Entscheidungszwickmühle“

# Ising-Modell als zellulärer Automat



Zustand 1: Spin up

Zustand 0: Spin down

Entwicklung für jeden Spin:
- Summe SN der Zustände der vier Nachbarn (von Neumann-Nachbarschaft)
- Wenn SN=2, dann und nur dann Umorientierung (Energieerhaltung).

Beispiel: Für den rot markierten Spin sind seine vier zu beachtenden Nachbarn grün markiert. Als Summe ergibt sich SN=1. Der rot markierte Spin behält seine Orientierung bei.

# Zellulärer Automat der Kooperation

- Aus 2 Personen-Spiel wird interaktives Mehrpersonenspiel
- Jede Zelle stellt 1 Person dar
- Zustände sind kooperativ oder nicht-kooperativ
- Jeder Zelle wird außerdem aktueller Gewinn/Verlust zugeordnet

Regeln:

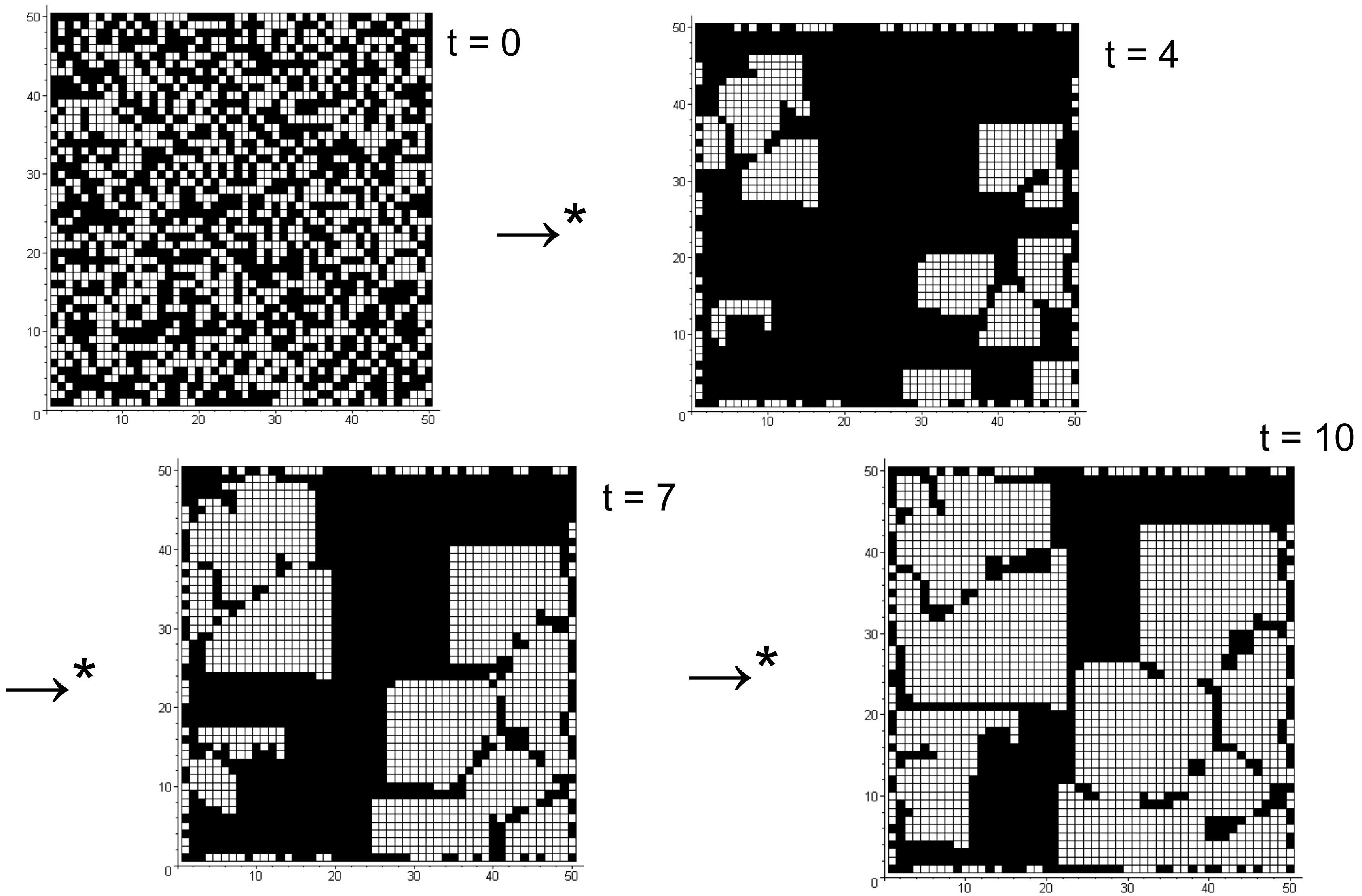
- Adaptives Verhalten der Individuen an Person der Nachbarschaft, die größten Gewinn erzielte / kleinsten Verlust erlitt.
- Gewinn/Verlust ergibt sich aus Aufeinandertreffen gleichgesinnter und ungleichgesinnter Nachbarn (ähnlich Gefangenendilemma)

| | | |
|---|---|---|
| k / 5 | k / 4 | k / 4 |
| u / 9 | **k / 6** | k / 4 |
| k / 2 | u / 7 | k / 5 |

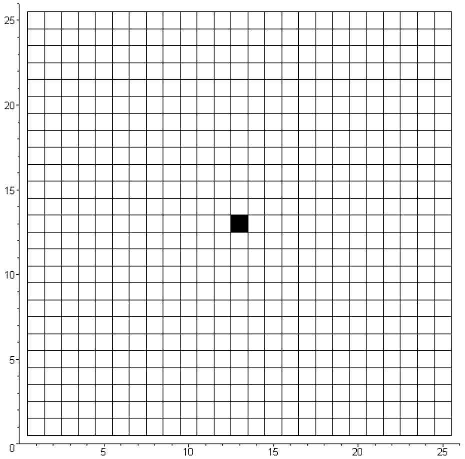
→

| | | |
|---|---|---|
| ? / ? | ? / ? | ? / ? |
| ? / ? | **u / ?** | ? / ? |
| ? / ? | ? / ? | ? / ? |

# Simulation des Kooperationsspiels

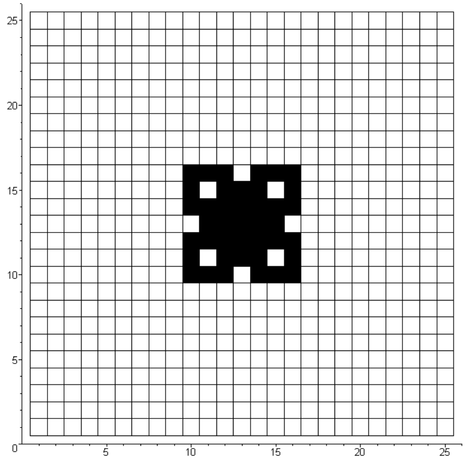


# Simulation des Kooperationsspiels



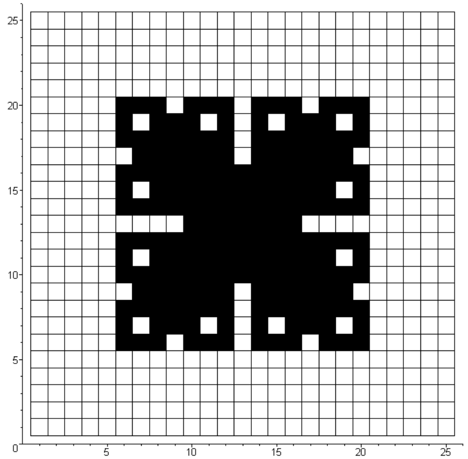

t = 0

$\longrightarrow^*$



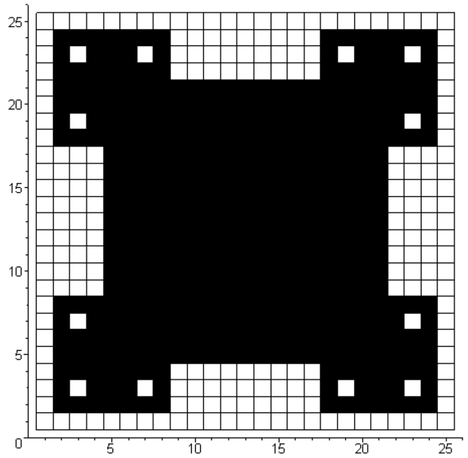

t = 3

$\longrightarrow^*$




t = 7

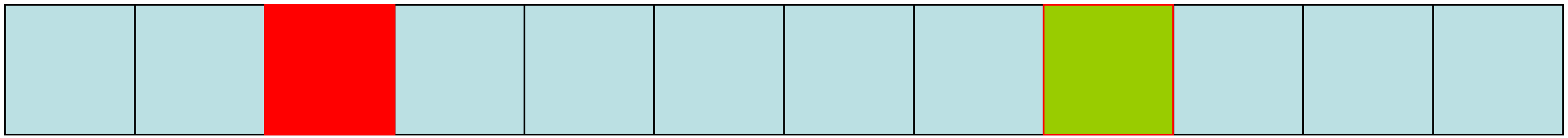
$\longrightarrow^*$




t = 11

# Verkehrsmodelle

Beispiel: Einspurige Autobahn als eindimensionaler
zellulärer Automat (Nagel-Schreckenberg-Modell)



$$\Delta x = 7{,}5m$$

$$\Delta t = 1s$$

$$\Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 7{,}5m/s$$

# Grundideen des Nagel-Schreckenberg-Modells

Jeder Fahrer richtet sich nach dem aktuellen Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug.

Jeder Fahrer *i*

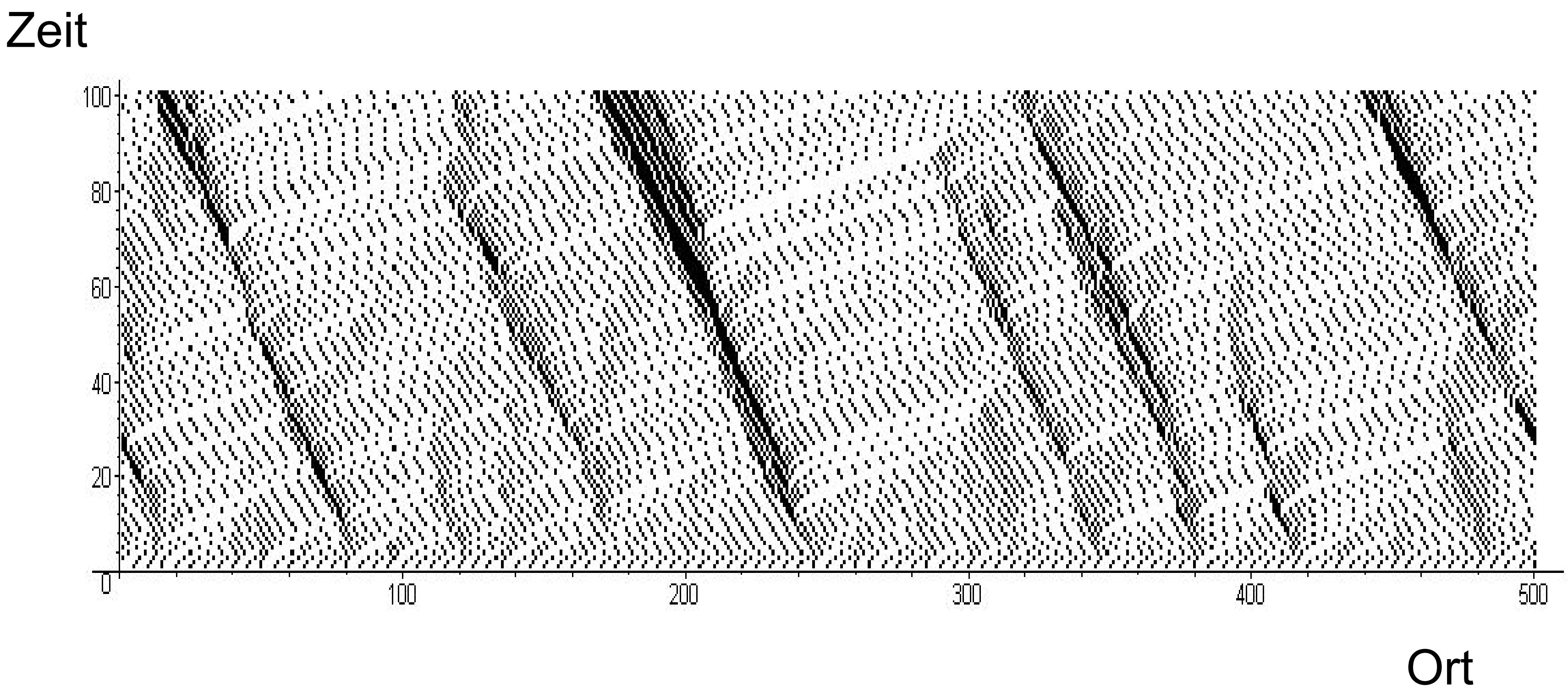
beschleunigt, wenn $s_i(t) > v_i(t), v_i(t) < v_{\max} \Rightarrow v_i(t+1) = v_i(t) + 1$

bremst, wenn $s_i(t) < v_i(t) \Rightarrow v_i(t+1) = s_i(t)$

trödelt mit Wahrscheinlichkeit p $v_i(t+1) = v_i(t) - 1$

bewegt sich $x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$

# Ausgewähltes Ergebnis des Nagel-Schreckenberg-Modells




Entwicklung eines homogenen Startzustandes über 100 Zeitschritte (500 Längeneinheiten, 100 Fahrzeuge, $v_{max}$=5, Trödelwahrscheinlichkeit p=0,15)

# 3. Ausblick

- relativ einfache Methode der Modellierung
- anschaulicher als Arbeit mit Differentialgleichungen
  (individuenbasiert, Strukturbildung)
- geeignet für fachübergreifende und projektartige Phasen
- Einsatz im Physikunterricht (deterministisches Chaos, …? )

**Stephan Wolfram: „A new kind of science!“**