

Inhaltsverzeichnis

1	Deterministisches Chaos im Lehrplan	3
2	Wetter	5
3	Bénard-Konvektion	8
3.1	Qualitative Beschreibung	9
3.2	Experiment zur Bénard-Konvektion	15
4	Lorenz-System	17
4.1	Herleitung der Lorenz-Gleichungen	17
4.1.1	Grundgleichungen der Hydrodynamik	17
4.1.2	Näherungen	21
4.1.3	Lorenz-Modell	23
4.2	Diskussion der Lorenz-Gleichungen	25
4.2.1	Komponenten der Lorenz-Gleichungen	25
4.2.2	Fixpunkte und ihre Stabilität	26
4.2.3	Deterministisches Chaos	31
4.2.4	Lorenz-Attraktor	32
5	Wettervorhersage	34
5.1	Grundlagen	34
5.2	Numerische Wettervorhersage	35
5.2.1	Prognosemodell	35
5.2.2	Datenassimilation	38
5.3	Wetter und Chaos	40
6	Anhang	44
6.0.1	Anhang 1	44
6.0.2	Anhang 2	44
6.0.3	Anhang 3	45
7	Eigenständigkeitserklärung	47
	Literaturverzeichnis	48

3 Bénard-Konvektion

Der französische Forscher Henri Bénard entdeckte 1900, dass sich beim Erhitzen einer dünnen Flüssigkeitsschicht Zellen bilden, die die Form regelmäßiger Sechsecke haben (siehe Abbildung 3.1).

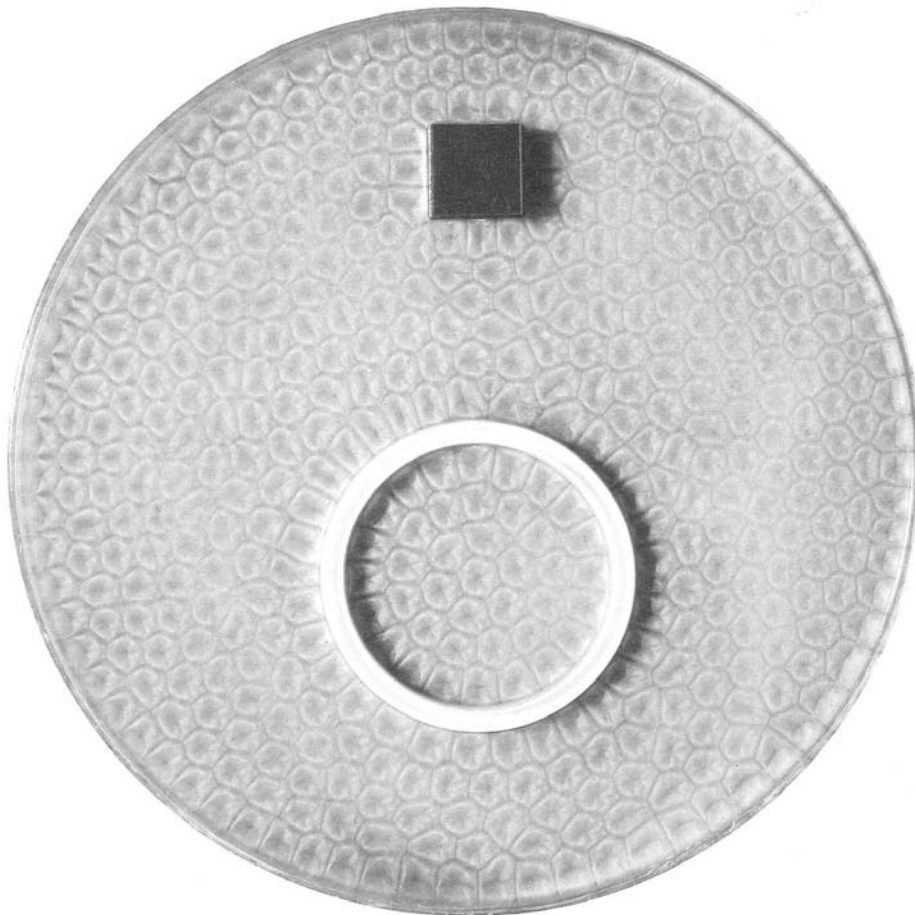


Abbildung 3.1 – Bénard-Zellen in einer Schicht Siliconöl mit Aluminiumspänen (aus [Velarde] S.39)

Der britische Physiker Lord Rayleigh veröffentlichte 1916 eine Arbeit, in der er die Beobachtungen von Bénard zu erklären versuchte. Obwohl seine Theorie das Experiment nicht sauber erklären konnte, lieferte er doch die wesentlichen Grundideen, auf die sich moderne Konvektionstheorien stützen([Velarde] S.40). Im folgenden Abschnitt 3.1 soll deshalb Rayleighs Theorie zur Erklärung der Bénard-Konvektion qualitativ erläutert werden.

Auf der Basis des Modells von Bénard und Rayleigh leitet der Meteorologe E.N. Lorenz 1963 die sehr populär gewordenen Lorenz-Gleichungen her. Sein Ziel war es mit den Gleichungen eine Vorhersage des Wetters in der Erdatmosphäre zu ermöglichen. Bei der Arbeit mit den Gleichungen stieß er eher zufällig auf einen wichtigen Effekt. Zur Zeiterparnis setzte er leicht gerundete Werte in sein Computerprogramm ein. Bei diesen Werten wich die Zeitentwicklung des Systems aber bald sehr stark von der Entwicklung mit den Originalwerten ab. Er entdeckte damit das Prinzip der schwachen Kausalität und wird daher als Begründer der modernen Chaosforschung gesehen (nach [Heinrichs] S.71 und [Worg] S.21). Aufgrund ihrer Relevanz für die Chaosforschung und für das Grundverständnis von Wettergeschehen sollen deshalb in Abschnitt 4 die Lorenz-Gleichungen näher untersucht werden.

3.1 Qualitative Beschreibung

Im Folgenden soll das Bénard-Problem qualitativ diskutiert werden. Es soll also geklärt werden, wie es zu Strömungen und Musterbildung in Fluiden kommen kann. Als Fluide werden Flüssigkeiten und Gasen bezeichnet, die einer sehr langsamen Scherung keinen Widerstand entgegen setzen.

Eine ausführliche qualitative Diskussion von Konvektion findet sich in „Chaos und Fraktale“ ([Velarde] S.38-51). Eine knappere Untersuchung mit einigen wichtigen Ergänzungen im Hinblick auf deterministisches Chaos wird in „Die Erforschung des Chaos“ ([Argyris] S.418-425) vorgenommen.

Lord Rayleigh geht in seiner Theorie zur Konvektion von 1916 von folgendem Modell aus. Man betrachtet eine sehr dünne und horizontal sehr weit ausgedehnte Flüssigkeitsschicht. Dadurch können in der Mitte der Schicht die Effekte durch die Ränder vernachlässigt werden. Die Schicht wird oben und unten durch zwei horizontale Platten abgegrenzt. Zur weiteren Vereinfachung sei die Flüssigkeit inkompressibel und die einzige Kraft, die von außen auf sie wirkt, sei die Schwerkraft. Bei einer Änderung der Temperatur soll sich nur die Dichte der Flüssigkeit ändern. Dies soll in normaler Weise so geschehen, dass sich die Flüssigkeit bei steigender Temperatur ausdehnt und damit ihre Dichte geringer wird.

Vorerst seien nun alle physikalischen Größen homogen verteilt und insbesondere sei die Temperatur der unteren Platte T_1 gleich der Temperatur der oberen Platte T_2 . In dieser Situation kommt es zu keinen makroskopischen Strömungsbewegungen. Wird eine kleine Störung zugeführt, also z.B. ein kleines Volumen um einige Grad erwärmt, wird diese absorbiert. Nach kurzer Zeit befindet sich die Flüssigkeit also wieder in Ruhe. Daher sagt man, dass sich das System in einem stabilen Gleichgewichtszustand befindet.

Nun wird der Flüssigkeitsschicht von unten konstant Wärme zugeführt. Daraufhin kommt es zu einem Wärmetransport durch die Schicht und die obere Platte erwärmt sich. Da diese nun aber Wärme an die Umwelt abgibt, bleibt ihre Temperatur niedriger als die der unteren Platte. Die Temperatur der Flüssigkeit nimmt also von unten nach oben ab. Weil die Dichte der Flüssigkeit von ihrer Temperatur abhängt, kommt es damit also zu einem Dichtegradient. Die Dichte nimmt von unten nach oben zu. Um nun die wirkenden Kräfte zu untersuchen, betrachten wir eine kleine kugelförmige Flüssigkeitsparzelle.

Betrachtet man ein Testvolumen am Boden der Schicht, das keine Störungen erfährt, so bleibt es dauerhaft in Ruhe. Es ist von Materie gleicher Dichte umgeben und befindet sich daher im Kräftegleichgewicht. Durch die zugeführte Wärme und die daraus resultierende Brownsche Bewegung sind jedoch alle Moleküle der Flüssigkeit in Bewegung. Betrachten wir also die Kräfte, die auf das Testvolumen wirken, nachdem es zufällig eine kleine Verschiebung nach oben erfahren hat. Das Volumen kommt aus einer Umgebung mit höherer Temperatur und hat somit eine niedrigere Dichte als die Flüssigkeit von der es umgeben wird. Somit wirkt eine Auftriebskraft auf die Parzelle und sie wird nach oben beschleunigt. Da die Auftriebskraft proportional zur Dichtedifferenz ist, wird diese mit steigender Höhe immer größer. Die Auftriebskraft verstärkt sich also selbst und somit steigt das Testvolumen mit zunehmender Geschwindigkeit nach oben (siehe Abbildung 3.2 links).

Für ein Testvolumen an der oberen Flüssigkeitsoberfläche gilt die analoge Argumentation. Eine zufällige kleine Verschiebung nach unten verstärkt sich selbst und es kommt zu einer immer schneller werdenden Abwärtsbewegung des Volumens. (siehe Abbildung 3.2 rechts) Die beiden beschriebenen Vorgänge sind die Grundlage der natürlichen Konvektion.

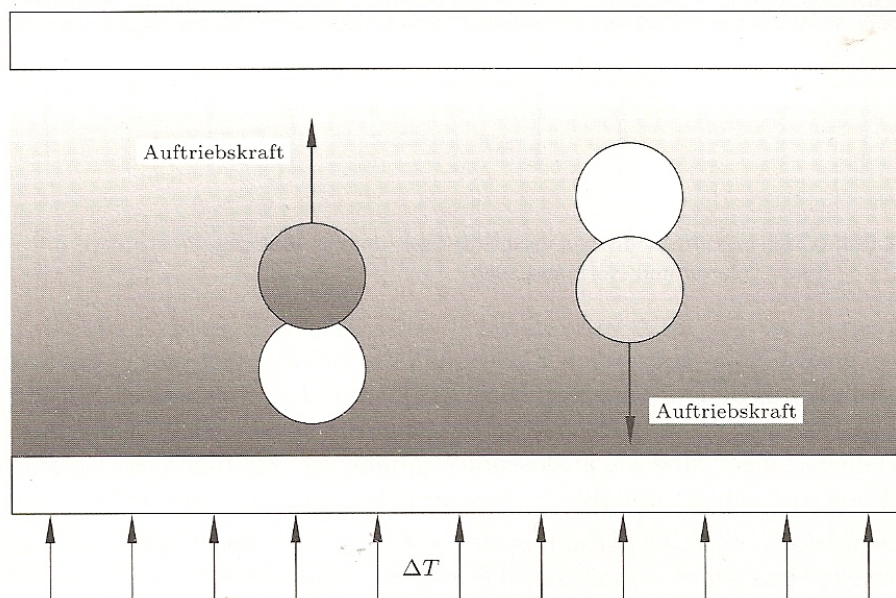


Abbildung 3.2 – Kräfte auf ein Testvolumen in einer dünnen Flüssigkeitsschicht (aus [Argyris] S.421)

Da in einem Fluid nicht gleichzeitig an einem Ort Materie aufsteigen und absinken kann, geschieht Folgendes: die Flüssigkeit steigt wie oben beschrieben auf, gibt an der oberen Platte Wärme an die Umwelt ab und sinkt dann wieder nach unten, um Wärme aufzunehmen und wieder aufzusteigen. Dies geschieht in sogenannten Konvektionsrollen, die je nach Form des Behälters, in dem sich die Flüssigkeit befindet, parallel zur kürzeren Rechteckseite oder in konzentrischen Ringen angeordnet sind. Dabei drehen sich zwei benachbarte Rollen immer in entgegengesetzte Richtungen (siehe Abbildung 3.3). In welche Richtung sich eine Zelle dreht, ist hierbei dem Zufall überlassen.