Handout - Russelsche Antinomie

SQ Naturwissenschaften für Querdenker
Nicklas Koppe und Klara Wolf

Grundlagen Mengenlehre:
Eine Menge in der Mathematik, definiert eine Ansammlung verschiedener Objekte zu einer Gesamtheit. Die Mengenlehre beschäftigt sich mit Mengen im Allgemeinen und deren Verknüpfungen untereinander.

beschreibende Mengendefinition:
$H = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist gerade}\}$

Element-Beziehung: $b \in \{x \mid E(x)\} \Leftrightarrow E(b)$

Beschreibung der Antinomie:
Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Die Frage dabei ist: Rasiert der Barbier sich selbst?
Problem: Barbier rasiert sich nicht selbst $\Leftrightarrow$ Barbier rasiert sich selbst

Russelklasse:
$R = \{x \mid x \text{ ist eine Menge und } x \notin x\}$
Hier entsteht das Problem dadurch, dass nicht entschieden werden kann, ob $R \in R$ oder $R \notin R$. In einer vollständigen Welt, muss jedoch mindestens eine der Aussagen gelten.

Auflösung der Antinomie:
Im Allgemeinen kann die Antinomie auf zwei Weisen gelöst werden. Entweder wird die Definition der Russelklasse verhindert oder sie stellt keine Menge dar.

Typentheorie nach Russel:
Mengen werden abhängig von ihren Elementen in hierarchische Ebenen unterteilt. Stufe 0 stellt dabei die Menge der Grundelemente dar und die Stufe n+1 ist stets eine Potenzmenge der Stufe n.
→ Somit wird die Definition der Russelklasse verboten, da es keine Ebene gibt auf der R zu liegen käme.

Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF/ZFC):
Verbreitete axiomatische Mengenlehre, die heute als Grundlage fast aller Zweige der Mathematik gilt. Ansammlung von unendlich vielen Axiomen, definiert in 9 bzw. 10 Axiomen und Axiomenschemata.
→ Dabei verhindert das Fundierungsaxiom oder Regularitätsaxiom die Definition von Mengen welche sich selbst enthalten.

Historische/mathematische Bedeutung der Antinomie:
Findet Bedeutung bei der Frage nach der Grundlage der Mathematik.
Erste große Theorie, die versucht aus der Logik eine Basis für die gesamte Mathematik zu schaffen kommt von Gottlob Frege. (“*Begriffsschrift*” 1879)
Die Russelsche Antinomie ließ sich jedoch ableiten, sodass der Formalismus scheiterte.
Das führte zur <u>Grundlagenkrise der Mathematik</u> mit 3 wesentlichen Strömungen:

- Logizismus (Gottlob Frege, Bertrand Russel,...)
    - Mathematik lässt sich auf Logik zurückführen und daraus ableiten
    - 2 Grundpositionen:
        - Alle mathematischen Wahrheiten müssen sich durch strikte Beweise auf eine feste Anzahl von Axiomen (Annahmen) zurückführen lassen.
        - Diese Axiome müssen „eines Beweises weder fähig noch bedürftig“ sein.

- Formalismus (David Hilbert,...)
    - Mathematik existiert eigenständig, keine Rückführung auf die Logik
    - Rechtfertigung der Mathematik durch deren erfolgreichen Anwendung (z.B. Naturwissenschaften)
    - Einschränkung: Annahmen/Axiome müssen widerspruchsfrei sein, (Beweis nötig!) jedoch nicht offensichtlich wie bei Logizismus

→Gödelscher Unvollständigkeitssatz: Es gibt kein Axiomensystem, dass widerspruchsfrei ist und aus dem sich die gesamte Mathematik ableiten lässt.
→Widerspricht den Forderungen von Logizismus und Formalismus

- Intuitionismus (L. E. J. Brouwer,...)
    - Mathematik wird konstruiert durch exaktes Denken - menschlichen vernünftigen Intuition wird Bedeutung zugeschrieben
    - Axiome können als unmittelbar einsichtig/Intuitiv zur weiteren Beweisführung herangezogen werden.

Ca. 1930 konnte schließlich ein Konsens gefunden werden.

Logizismus → Mathematisches Schließen = logisches Schließen

Formalismus → Mathematik lässt sich nicht aus Logik herleiten

Intuitionismus → Mathematik besitzt zweifelsfreien Kern: endliche Arithmetik

Aber! nach Gödelschen Unvollständigkeitssatz kann Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden