

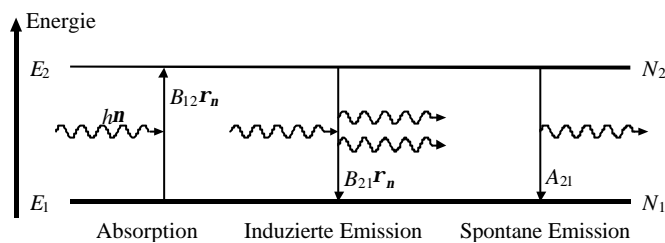
## 9 Strahlungsgleichungen

Ein spontanes Ereignis bedarf keines Anstoßes von außen, um ausgelöst zu werden. Das Licht thermischer Strahler, das wir visuell wahrnehmen, entsteht dadurch, dass eine Substanz bei hohen Temperaturen spontan Lichtquanten aussendet. Ein induziertes oder stimuliertes Ereignis erfolgt nur nach einem Anstoß von außen. Demnach ist ein Absorptionsvorgang immer induziert (stimuliert). Aber auch ein Emissionsvorgang kann induziert werden, wenn von außen eine Frequenz eingestrahlt wird, die der des emittierenden Übergangs entspricht.

Wir betrachten zwei Energieniveaus eines isolierten Teilchens, siehe unten. Da die folgenden Betrachtungen für zwei beliebige Zustände gelten, kann man sie allgemein mit  $i$  und  $j$  bezeichnen. Hier und in den nächsten beiden Abschnitten setzen wir  $i = 1$  und  $j = 2$ .

Es sei  $E_2 > E_1$  und  $E_2 - E_1 = h\mathbf{n}$ , wobei  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  Js die Planck-Konstante ist.

Die Besetzungszahlen der Zustände sind  $N_2$  und  $N_1$ .



Die Zahl der Teilchen, die vom Zustand 1 in den Zustand 2 übergehen, ist

$$-dN_1 = B_{12} w_n N_1 dt, \quad (9.01)$$

wobei  $B_{12} w_n$  die Absorptionswahrscheinlichkeit mit der spektralen Energiedichte  $w_n$  bezeichnet.

Die von den Teilchen beim Übergang absorbierte Energie wird durch

$$dW_{\text{abs}} = h\mathbf{n} dN_1 \quad (9.02)$$

und die als Strahlung beim Übergang von 2 nach 1 emittierte Energie durch

$$dW_{\text{em}} = h\mathbf{n} dN_2 \quad (9.03)$$

beschrieben. Für die Bilanz der Teilchen, die von 2 nach 1 gehen, muss zusätzlich zur induzierten Übergangswahrscheinlichkeit  $B_{21} w_n$  eine spontane Übergangswahrscheinlichkeit  $A_{21}$  berücksichtigt werden:

$$-dN_2 = (B_{21} w_n + A_{21}) N_2 dt. \quad (9.04)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $A_{21}$  hängt nicht von äußeren Feldern ab. Die Wahrscheinlichkeit eines induzierten Übergangs ist dagegen das Produkt des  $B$ -Koeffizienten mit der spektralen Energiedichte der äußeren Felder im Frequenzbereich zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ . Die spektrale Energiedichte  $w_n$  hat die Dimension Energie pro Volumen und Frequenz. Oft wird anstelle dieser Größe die spektrale Strahldichte (Strahlungsdichte)  $L_n$  verwendet.  $L_n$  entspricht der Leistung, die im Frequenzbereich zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$  pro Flächeneinheit in einen Kegel mit dem Raumwinkel  $\mathbf{W}=1$  ausgestrahlt wird. Der Raumwinkel  $\mathbf{W}=1$  ist dadurch definiert, dass er auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1 m eine Fläche von  $1 \text{ m}^2$  aus der Gesamtoberfläche von  $4\pi \text{ m}^2$  ausschneidet. Der Öffnungswinkel des entsprechenden Kegels ist etwa  $73^\circ$ . Im Vakuum gilt mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$ :

$$L_n = w_n c_0 / 4\pi. \quad (9.05)$$

$B_{12}$  und  $B_{21}$  sind die Einstein-Koeffizienten für Absorption und induzierte Emission. Mit Hilfe dieser Koeffizienten konnte Albert Einstein 1917 einen einfachen und gut gesicherten Beweis der Strahlungsformel erbringen, die bereits Ende 1900 von Max Planck durch eine Interpolation (des Verhaltens der zweiten Ableitung der Entropie nach der Energie) zwischen dem Wien-Strahlungsgesetz und dem Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz abgeleitet worden war.

Die Einstein-Ableitung geht von einem abgeschlossenen Hohlraum im Wärmebad mit der Temperatur  $T$  aus. Wegen des Gleichgewichts sind für beliebige zwei Zustände, zwischen denen Übergänge stattfinden, die Zahlen der absorbierten und emittierten Energiequanten gleich.  $w_n$  entspricht in diesem Fall der spektralen Energiedichte eines schwarzen Körpers, die mit  $r_n$  bezeichnet wird. Aus  $(A_{21} + B_{21} r_n) N_2 = B_{12} r_n N_1$  folgt

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} r_n}{A_{21} + B_{21} r_n} \quad (9.06)$$

Andererseits gilt für das System die Boltzmann-Statistik:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left[-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right] = \frac{g_2}{g_1} \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]. \quad (9.07)$$

$k$  bezeichnet die Boltzmann-Konstante und  $h$  ist das Planck-Wirkungsquantum. Die statistischen Gewichte  $g_{1,2}$  sind im weiteren  $g_1 = g_2 = 1$  gesetzt, d. h. eine Entartung der Energieniveaus wird nicht berücksichtigt. Aus Gleichungen (9.06) und (9.07) ergibt sich

$$r_n = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}}. \quad (9.08)$$

In Gleichung (9.08) ist über das Verhältnis zwischen  $B_{12}$  und  $B_{21}$  noch keine Festlegung getroffen. Macht man aber die plausible Annahme, dass für  $T \rightarrow \infty$  auch  $r_n \rightarrow \infty$  gelten muss, ergibt sich aus G (9.08) die Relation  $B_{12} = B_{21}$ . Für die Bestimmung des Verhältnisses zwischen  $A_{21}$  und  $B_{21}$  wird das im Juni 1900 von Lord Rayleigh und James Hopwood Jeans aufgestellte Strahlungsgesetz herangezogen. Im niederfrequenten Bereich ( $h\nu \ll kT$ ) muss G (9.08) mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz

$$r_n = \frac{8p n^2 kT}{c_0^3} \quad (9.09)$$

übereinstimmen, das auf Grundlage der klassischen Elektrodynamik bzw. klassischen Statistik hergeleitet werden kann und im niederfrequenten Bereich auch experimentell bestätigt worden ist. Mit  $\exp(h\nu/kT) \approx 1 + h\nu/kT$  für  $h\nu \ll kT$  ergibt sich unter Beachtung von  $B_{12} = B_{21}$  aus G (9.08)

$$r_n = \frac{A_{21} kT}{B_{21} h\nu}. \quad (9.10)$$

Aus den Gleichungen (9.09) und (9.10) folgt damit das für beliebige Relationen von  $hn$  zu  $kT$  gültige Verhältnis des spontanen zum induzierten Übergangskoeffizienten

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8p h n^3}{c_0^3}. \quad (9.11)$$

G (9.11) in (9.08) eingesetzt ergibt die berühmte Planck-Strahlungsformel:

$$r_n = \frac{8p h n^3}{c_0^3} \frac{1}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1}. \quad (9.12)$$

Verwendet man anstelle der frequenzabhängigen Energiedichte  $r_n dn$  die wellenlängenabhängige Energiedichte  $r_l d\lambda$ , ergibt sich im Vakuum unter Beachtung von  $n = c_0/\lambda$  und  $dn = -c_0/\lambda^2 d\lambda$

$$r_l = \frac{8p h c_0}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1}. \quad (9.13)$$

Das für  $hn \ll kT$  gültige Rayleigh-Jeans-Gesetz ist bei Einsteins Ableitung der Planck-Strahlungsgleichung verwendet worden. Andere Strahlungsgesetze sind aber nicht verwendet worden und können im Rahmen der Einstein-Ableitung als Schlussfolgerung aus der Planck-Strahlungsgleichung präsentiert werden:

Für  $hn \gg kT$  gilt  $\exp(hn/kT) \gg 1$ , und es ergibt sich aus G (9.12) als Spezialfall das bereits 1896 von Wilhelm Wien in dieser Form (bis auf die später bestimmten Faktoren  $8\pi h/c_0^3$  und  $h/k$ ) abgeleitete und nach ihm benannte Wien-Strahlungsgesetz

$$r_n = \frac{8p h n^3}{c_0^3} e^{-\frac{hn}{kT}}. \quad (9.14)$$

Bildet man von Gleichung (9.13) die erste Ableitung nach der Wellenlänge und setzt sie null, erhält man ein Maximum der spektralen Energiedichte des schwarzen Körpers bei  $\lambda_{\max}$ . Die Wellenlänge folgt der Beziehung

$$\lambda_{\max} T = \text{const.} = \frac{h c_0}{k 4,9651} = 2,8978 \text{ mm K} \quad (9.15)$$

und beschreibt eine Verschiebung des Maximums der Intensitätsverteilung mit wachsender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen hin. (Die Zahl 4,9651 ist die in der letzten Dezimale gerundete Nullstelle der Ableitung; entsprechend ist die Zahl 2,8978 gerundet.) Dieses von Wien 1893 abgeleitete *Verschiebungs-Gesetz* war die Grundlage für seine Überlegungen zur Aufstellung der ersten Form des *Strahlungs-Gesetzes*. Bei 300 K liegt das Maximum der Strahlung des schwarzen Körpers bei ca. 10  $\mu\text{m}$  im Infrarot. Erst bei etwa 4000 K rückt es ins sichtbare Spektrum.

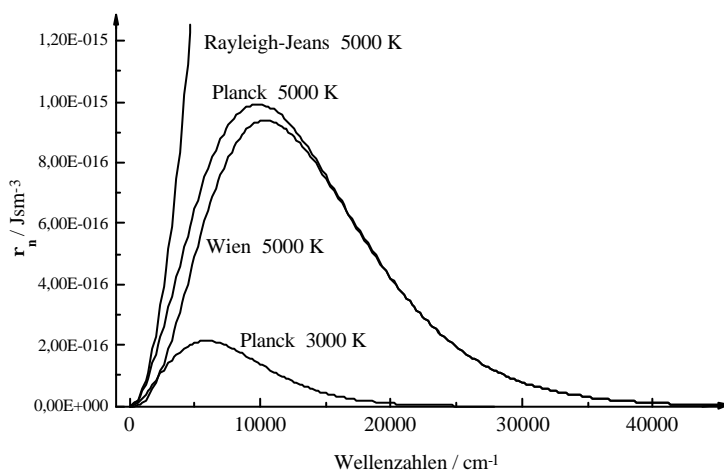
Aus den Gleichungen (9.13) und (9.15) ergibt sich das Gesetz

$$r_l^{\max} = \text{const.} \cdot T^5 \quad (9.16)$$

für die Energiedichte im Bereich des Maximums. Der Vollständigkeit halber wird noch das von Josef Stephan 1878 experimentell gefundene und von Ludwig Eduard Boltzmann thermodynamisch begründete Stefan-Boltzmann-Gesetz genannt, das sich aus der Integration von G (9.13) ergibt:

$$\int_0^{\infty} r_l dl = T^4 \frac{8p^6 k^4}{15 c_0^3 h^3} = s T^4. \quad (9.17)$$

Die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers ist der vierten Potenz der Temperatur proportional. Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass bei obigen Gleichungen Energiedichten verwendet worden sind. Zur Umrechnung in die häufig in der Literatur anzutreffenden Strahldichten ist G (9.05) zu verwenden. Zum Beispiel wandelt sich in G (9.17) bei Verwendung von  $L_l$  an Stelle von  $r_l$  der Faktor  $s$  in  $2\pi^5 k^4 / (15c_0^2 h^3) \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ um}$ .



Links ist die Frequenzabhängigkeit der spektralen Energiedichte des schwarzen Körpers bei einer Temperatur von 5000 K nach den Gesetzen von Wien, Rayleigh-Jeans und Planck dargestellt. Anstelle der Frequenz  $\nu$  ist die Wellenzahl  $\tilde{\nu} = \nu/c_0$  aufgetragen. Zusätzlich ist der Verlauf nach Planck für die Temperatur von 3000 K angegeben. Der sichtbare Bereich des Spektrums liegt zwischen  $13000 \text{ cm}^{-1}$  und  $26000 \text{ cm}^{-1}$ .

Bei Verwendung der Einstein-Koeffizienten ergibt sich aus einer Umstellung von G (9.10) das Verhältnis von spontaner zu induzierter Emissionswahrscheinlichkeit

$$\frac{A_{21}}{B_{21} r_n} = \frac{h\nu}{kT}. \quad (9.18)$$

Für eine Temperatur von 300 K liegt das Gleichgewicht zwischen beiden Wahrscheinlichkeiten bei  $\nu = k \cdot 300 \text{ K} / h \approx 6,25 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ , bzw.  $\tilde{\nu} = 208 \text{ cm}^{-1}$  oder  $\lambda = 48 \text{ }\mu\text{m}$ , also im fernen Infrarot. Das gilt für den schwarzen Strahler, der am besten durch einen temperierten Hohlraum realisiert wird, dessen Strahlung durch eine kleine Öffnung nach außen tritt. Beim Laser treten wesentlich höhere Strahlungsdichten als im schwarzen Körper auf. Durch Konzentration der Strahlungsdichte auf ein extrem schmales Frequenzspektrum überwiegt für die Laser auch im höherfrequenten Bereich die induzierte Emission.

Zur weiteren Erläuterung des Verhältnisses von spontaner zu induzierter Emission führen wir die Eigenschwingungen ein, für die sich auch im deutschen Sprachgebrauch das englische Wort „Mode“ (engl. *mode* = Art und Weise) eingebürgert hat. Dabei kann man das Photonenbild oder das Wellenbild in einem mit parallelen Spiegeln abgeschlossenen kubischen Raum verwenden: Im *Photonenbild* wird ein Photon zwischen den Spiegeln „hin“ und „her“ reflektiert. Im *Wellenbild* verschwindet die Feldstärke einer stehenden Welle am Rand des Raumes. Deshalb muss ein ganzzahliges Vielfaches von  $l/2$  dem Spiegelabstand  $L$  entsprechen. Es gibt in der Literatur ein weiteres Wellenbild, das anstelle einer stehenden Welle eine hin- oder zurücklaufende Welle verwendet. Dann muss der Spiegelabstand einem Vielfachen von  $l$  entsprechen, und der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  ergibt sich wegen der unterscheidbaren positiven und negativen Ausbreitungsrichtung als  $\mathbf{k} = (2\pi/L) (n_x, n_y, n_z)$  für positive und negative ganze Werte von  $n_i$ . Wir betrachten jedoch im weiteren das Bild einer stehenden Welle im Vakuum. Der Wellenvektor für eine beliebige stehende Welle im Würfel mit der Kantenlänge  $L$  ist

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad (9.19)$$

mit  $n_i$  als positiven ganzen Zahlen. Es gilt mit  $|\mathbf{k}| = 2\pi/l$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{w}}{2\mathbf{p}} = \frac{c_0}{l} = |\mathbf{k}| \frac{c_0}{2\mathbf{p}} = \frac{c_0}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}. \quad (9.20)$$

Der Vektor  $\mathbf{A}$  ergibt sich aus der Summe aller Moden mit

$$\mathbf{A} = \sum_j \mathbf{a}_j \sin(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \mathbf{w}_j t), \quad (9.21)$$

wobei die  $\mathbf{a}_j$  zeitabhängige Vektoren darstellen und jeder Index  $j$  ebenso wie jeder Wellenvektor  $\mathbf{k}_j$  für eine bestimmte Kombination von  $(n_x, n_y, n_z)$  stehen. Wir nehmen an, dass  $\mathbf{A}$  das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes ist und setzen  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ . Damit gilt für jeden Wert von  $j$  das Skalarprodukt  $\mathbf{k}_j \mathbf{a}_j = 0$ . Der Wellenvektor steht also senkrecht auf dem Amplitudenvektor. Die Welle ist transversal und kann als Linearkombination zweier linear polarisierter Wellen dargestellt werden. Deshalb hat jeder Vektor  $\mathbf{k}_j$  zwei Eigenschwingungen (zwei Zustände, zwei Moden).

Wegen der in Gleichung (9.19) dargestellten Form des Wellenvektors lässt sich jeder Vektor  $\mathbf{k}$  durch einen Punkt in einem dreidimensionalen  $k$ -Raum darstellen. Dieser Raum unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Raum dadurch, dass er nur Punkte für die ganzzahligen Werte von  $n_x, n_y$  und  $n_z$  enthält.

Die Zahl  $\Delta n$  der möglichen Werte von  $\mathbf{k}$  in den Intervallen  $\Delta k_x, \Delta k_y$  und  $\Delta k_z$  ist gleich dem Produkt  $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ , d. h., es gilt wegen  $k_i = (\pi/L) n_i$

$$\Delta n = \frac{L^3}{\mathbf{p}^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (9.22)$$

Die Zahl der Punkte im Bereich  $|\mathbf{k}|$  bis  $|\mathbf{k}| + \Delta|\mathbf{k}|$  entspricht dem Volumen einer Kugelschale. Da jedoch nur positive  $n_i$  betrachtet werden, ist nur der entsprechende Oktant (1/8 des gesamten Kugelschalenvolumens) zu betrachten:

$$\Delta n = \frac{L^3}{\mathbf{p}^3} \frac{4\mathbf{p}}{8} |\mathbf{k}|^2 \Delta|\mathbf{k}|. \quad (9.23)$$

Berücksichtigt man nun außerdem, dass für jeden Vektor die beiden Polarisationsmöglichkeiten der Welle zwei Moden ergeben, gilt für die Zahl der unterschiedlichen Moden pro Einheitsvolumen

$$\frac{\Delta n}{L^3} = \frac{1}{\mathbf{p}^2} |\mathbf{k}|^2 \Delta|\mathbf{k}|. \quad (9.24)$$

Der Übergang von Differenzen ( $\Delta$ ) zu differentiellen Größen ( $d$ ) ergibt sich, wenn man  $\Delta n/L^3$  durch  $n(\mathbf{n}) d\mathbf{n}$  (Zahl der Moden pro Volumen im differentiell kleinen Frequenzbereich) und  $\Delta|\mathbf{k}|$  durch  $d|\mathbf{k}|$  unter Beachtung von  $|\mathbf{k}| = 2\pi\mathbf{n}/c_0$  ersetzt. Damit wird

$$n(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \frac{8\mathbf{p}\mathbf{n}^2 d\mathbf{n}}{c_0^3}. \quad (9.25)$$

Setzt man G (9.11) in (9.25) ein, ist das Verhältnis der Emissionskoeffizienten

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = n(\mathbf{n}) h\mathbf{n}. \quad (9.26)$$

Durch Erweiterung dieser Beziehung mit der spektralen Energiedichte  $w_n$  ergibt sich das Verhältnis der induzierten zur spontanen Emissionswahrscheinlichkeit als

$$\begin{aligned} \frac{B_{21}w_n}{A_{21}} &= w_n \frac{1}{n(\mathbf{n})} \frac{1}{h\mathbf{n}} = \\ &= \frac{\text{Energie von } N \text{ Photonen}}{\text{Volumen} \times \text{Frequenz}} \frac{\text{Volumen} \times \text{Frequenz}}{\text{Zahl der Moden}} \frac{1}{\text{Energie eines Photons}} = \\ &= \frac{\text{Zahl der } N \text{ Photonen}}{\text{Zahl der Moden}}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Auf eine Mode bezogen heißt das: Das Verhältnis der induzierten zur spontanen Emissionswahrscheinlichkeit ist für eine beliebige Mode gleich der Zahl der Photonen in dieser Mode. Damit erhält die Darstellung der induzierten Emission in Abbildung am Beginn dieses Kapitels folgende Erklärung: *Induzierte Emission tritt auf, wenn ein Photon mit der entsprechenden Energie auf eine Mode trifft, die viele Photonen enthält.*