

## 8 Wellen

### 8.1 Mechanische Wellen

Allgemein ist eine Welle ein sich räumlich ausbreitende Erregung bei der Energie transportiert wird (siehe Wellenkraftwerk), nicht aber das Ausbreitungsmedium. In einem Medium (Wasser, Metall, Luft aber nicht im Vakuum) ist eine Welle die Ausbreitung einer einmaligen oder periodischen Störung (Auslenkung) von Teilchen. Im Vakuum breiten sich physikalische Felder aus, z. B. kann die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle als Ausbreitung von Photonen betrachtet werden.

Betrachtet man die Schwingungen an zwei benachbarten Orten, sind sie im Allgemeinen gegeneinander in der Phase verschoben. Die Phase an einem in Ausbreitungsrichtung verschobenem Ort verringert sich infolge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Der minimale Abstand zweier Orte, für die Schwingungen in gleicher Phase erfolgen, heißt Wellenlänge  $\lambda$ . Damit ergibt sich folgende Beschreibung einer sich in  $x$ -Richtung ausbreitenden harmonischen Welle:

$$y(t, x) = y_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = y_0 \cos(\omega t - k_x x). \quad (8.01)$$

G (8.01) gilt für maximale positive Auslenkung für  $t = 0$  und  $x = 0$ , andernfalls ist in das Argument die Anfangsphase  $\varphi_0$  einzufügen. Neben der Kreisfrequenz der Schwingung  $\omega = 2\pi/T$  ist die Kreiswellenzahl  $k_x = 2\pi/\lambda$ , die bei dreidimensionaler Betrachtung durch den Ausbreitungsvektor  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z = (k_x, k_y, k_z)$  mit  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  zu ersetzen ist. Die Verwendung von  $y$  als Variable soll keine Festlegung darüber treffen, in welcher Richtung die Teilchen schwingen.

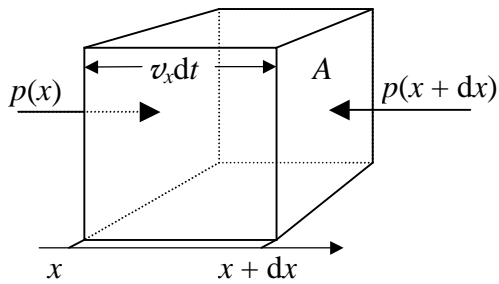
Als Phasengeschwindigkeit wird die Geschwindigkeit der Ausbreitung des Wellenmaximums bezeichnet. Für das Wellenmaximum muss das Argument der Cosinus-Funktion in G (8.01) null sein. Daraus ergibt sich  $\omega t = k_x x$  und es folgt für die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = dx/dt = \omega/k_x = v \lambda = c. \quad (8.02)$$

In G (8.02) ist dargestellt, dass die Phasengeschwindigkeit das Produkt aus Frequenz und Wellenlänge ist und als Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bezeichnet wird. Weil wir es bei den Wellen mit erzwungenen Schwingungen von Teilchen zu tun haben, bleibt beim Übergang von einem Medium zum anderen die Schwingungsfrequenz konstant. Die Wellenlänge hängt jedoch von Materialeigenschaften ab, insbesondere von der Stärke der Wechselwirkung der schwingenden Teilchen. Deshalb ist in einem Medium die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (Phasengeschwindigkeit gleich Produkt aus Wellenlänge und Frequenz) von der Wellenlänge abhängig.

Zusätzlich ist zu beachten, dass man durch eine einfache harmonische Welle kein Signal übertragen kann. Das Signal entsteht erst durch die Modulation der harmonischen Welle, die auf Übertragung unterschiedlicher Frequenzen beruht, siehe Kapitel 7.6. Haben diese nun eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit, dann muss anstelle G (8.02) für die Geschwindigkeit der Ausbreitung der Gruppe (Gruppengeschwindigkeit) folgende Beziehung verwendet werden:

$$v_G = dx/dt = d\omega/dk_x. \quad (8.03)$$



In einer Flüssigkeit kann sich nur eine longitudinale Welle ausbilden, das heißt, die Teilchen schwingen in Ausbreitungsrichtung ( $y$ -Richtung gleich  $x$ -Richtung). Wir betrachten das differentielle Volumenelement mit der Länge  $dx$  und der senkrecht zu  $x$  liegenden Querschnittsfläche  $A$ , der mittleren Dichte  $\rho$  dem variablen Druck  $p(x, t)$  und der Geschwindigkeit  $v_x(x, t)$ .

Mit der Kraft  $F_x = - [p(t, x + dx) - p(t, x)] A = - (\partial p / \partial x) dx A$ , die auf das Massenelement  $\rho A dx$  wirkt, ergibt sich nach dem zweiten Newtonschen Axiom (Kraft gleich Masse mal Beschleunigung)

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (8.04)$$

Die Differentialquotienten in G (8.04) sind als partielle Ableitungen geschrieben worden. Die Variablen  $v_x$  und  $p$  hängen sowohl vom Ort als auch von der Zeit ab. Die Ortsabhängigkeit impliziert eine Zeitabhängigkeit und umgekehrt. Partielle Ableitungen bedeuten, dass man nur nach der expliziten Abhängigkeit differenziert und dabei die andere(n) Variable(n) als konstant betrachtet.

Eine zweite zu G (8.04) ähnliche Gleichung erhalten wir für die Betrachtung des in obiger Abbildung dargestellten Systems zum Zeitpunkt  $t + dt$ . Zu dieser Zeit befindet sich eine Seite des Volumenelements  $A dx$  bei  $x + v_x(x) dt$ , die andere bei  $x + dx + v_x(x + dx) dt$ . Wegen  $v_x(x + dx) = v_x(x) + (\partial v_x / \partial x) dx$  ergibt sich für die Volumenänderung zwischen  $t$  und  $t + dt$  der differentielle Wert  $dV = A (\partial v_x / \partial x) dx dt$ . Das Gesamtvolumen  $V = A dx$  und die differentielle Änderung  $dV$  werden nun in die Definitionsgleichung des Kompressionsmoduls  $K$  in fluiden Materialien  $K = - V dp / dV$  eingesetzt, vgl. G. (6.10). Damit erhalten wir

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (8.05)$$

Bildet man die partiellen Ableitungen von G (8.04) nach der Ortsvariablen  $x$  und G (8.05) nach der Zeitvariablen  $t$  müssen beide Ergebnisse gleich sein, da die Reihenfolge der Differentiation vertauschbar ist. Es ergibt sich durch Gleichsetzen der Ergebnisse

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (8.06)$$

was die eindimensionale Wellengleichung des Druckes für eine sich in einer Flüssigkeit (oder einem Gas) ausbreitenden Welle darstellt. Durch Einsetzen in G (8.06) lässt sich leicht verifizieren, dass

$$p(t, x) = p_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\rho / K} x) \quad (8.07)$$

eine spezielle (partikuläre) Lösung darstellt.

Wenden wir auf diese Lösung die Vorschriften (8.02) und (8.03) zur Bestimmung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit an, erhalten wir die Gleichheit von Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit bei elastischen Schwingungen:

$$v_p = v_G = c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (8.08)$$

Damit können wir die gewöhnliche Wellengleichung in dreidimensionaler Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_p^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \quad (8.09)$$

Analoge Rechnungen führen bei mechanischen schwingenden Systemen zu folgenden Ergebnissen für die Phasengeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit)  $c$ :

Wellentyp	Phasengeschw.	Beispiel
Longitud. Welle in Flüssigkeiten und Gasen	$\sqrt{\frac{K}{\rho}}$	Schall im Tunnel
Longitudinale Welle in dünnen Stab	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Geräusche über Heizungsrohr
Longitudinale Welle im Festkörper	$\sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}$	Erdbebenwellen
Transversale Seilwelle	$\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$	Saite eines Instruments

In obiger Tabelle bezeichnen  $E$ ,  $K$ , und  $G$  die Module der Elastizität, der Kompression und des Schubs (Torsion, Scherung),  $\rho$  die Dichte,  $F$  die Kraft und  $A$  den Querschnitt.

Mechanische Wellen (wie auch alle anderen) transportieren keine Materie sondern Energie. Wir betrachten ein Volumenelement  $dV$  mit der Masse  $dm = \rho dV$ . Mit G (7.14) war für die Energie einer Schwingung hergeleitet worden:  $E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$ . Wir bilden  $dE/dm$ , setzen für  $dm$  die Größen  $\rho dV$  ein und erhalten

$$dE = \frac{1}{2} dm v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho dV v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho dV \omega_0^2 x_0^2. \quad (8.10)$$

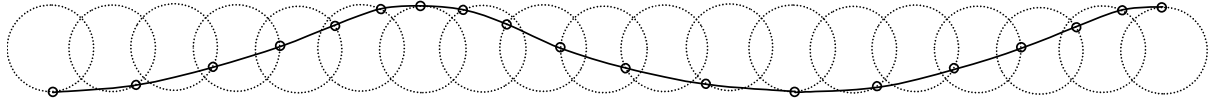
Die Energiedichte ist  $w = dE/dV$  und wir erhalten

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega_0^2 x_0^2. \quad (8.11)$$

Damit ist die Energiedichte (Dimension  $J m^{-3}$ ) proportional dem Quadrat der Amplitude und dem Quadrat der Frequenz. Die Energie, die je Zeiteinheit die Fläche  $dA$  senkrecht durchsetzt, nennt man Energiestromdichte oder Intensität einer Welle (Dimension  $J m^{-2} s^{-1}$ ). Sie ist Produkt von Energiedichte  $w$  und Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Es gilt

$$S = wc = \frac{1}{2} c \rho \omega_0^2 x_0^2. \quad (8.12)$$

**Oberflächenwellen von Flüssigkeiten** sind der Ursprung aller menschlichen Wellenbetrachtungen. Nichtbrechende hohe Wellen (keine Kräuselwellen) in tiefen Gewässern (Wassertiefe größer als Wellenlänge) lassen sich durch eine Kreisbewegung der Flüssigkeitsteilchen beschreiben, wobei die Achse des Kreises in Richtung der Wellenfront verläuft:



Erfolgt die Kreisbewegung im Uhrzeigersinn, bewegt sich der Wellenberg nach rechts. Die mathematische Beschreibung der Teilchenbewegung (differenziell kleines Wasservolumen) ergibt sich durch Überlagerung einer longitudinalen und einer transversalen Schwingung gleicher Amplitude  $h/2$ , wobei  $h$  die Wellenhöhe darstellt. Ein ortsfester Beobachter stellt die Kreisbewegung der Teilchen mit einem Radius  $h/2$  fest, wobei die obere Tangentialgeschwindigkeit  $v$  und die untere  $-v$  sind. Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist Tangentialgeschwindigkeit  $v$  durch Radius  $h/2$ :

$$\omega = \frac{2v}{h}. \quad (8.13)$$

Nehmen wir an, dass sich ein anderer Beobachter auf einem Wellenmaximum mit der Phasengeschwindigkeit  $c$ , vgl. G (8.02), nach rechts fortbewegt. Da die Teilchen im Zeitmittel über eine (oder sehr viele) in obiger Abbildung gezeigten Umdrehungen ihren Ort nicht verändern, bewegt sich dann ein Teilchen (oder ein Blatt auf der Wasseroberfläche) mit der mittleren Geschwindigkeit  $c$  links vom Beobachter fort. Genaue Beobachtung ergibt, dass das Blatt sich auf dem Wellenkamm um  $v$  langsamer und im Wellental um  $v$  schneller weg bewegt. Die Differenz der kinetischen Energie zwischen Tal und Kamm ist  $\frac{1}{2} m (c + v)^2 - \frac{1}{2} m (c - v)^2 = 2m c v$ . Diese Differenz muss der Differenz der potentiellen Energie entsprechen, die  $mgh$  beträgt. Aus Gleichsetzen ergibt sich

$$v = \frac{gh}{2c}. \quad (8.14)$$

Setzen wir G (8.14) in G (8.13) ein, ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi\nu$  ( $\nu$  ist die Frequenz der Teilchenbewegung)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{g}{c}. \quad (8.15)$$

In Verbindung mit G (8.02),  $v_p = \nu\lambda = c$ , ergibt sich aus G (8.15) als Phasengeschwindigkeit des Wellenbergs

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (8.16)$$

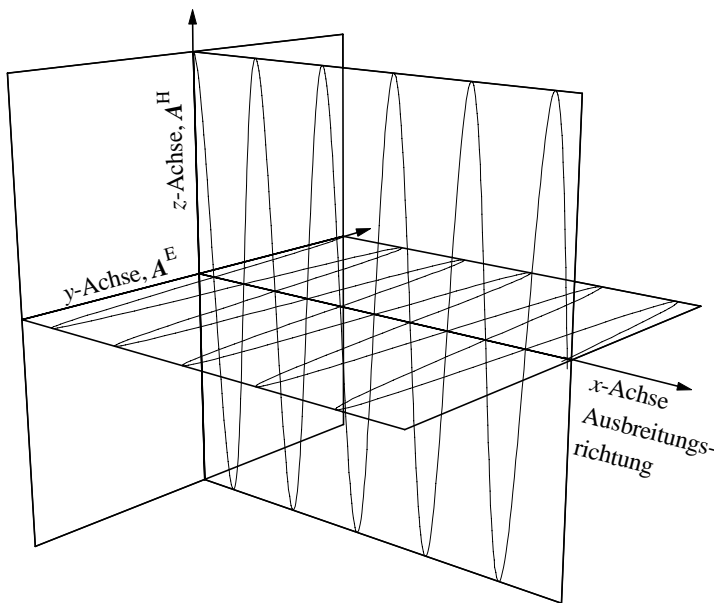
wonach lange Wellen schneller laufen.

## 8.2 Elektromagnetische Wellen

Im Jahre 1886 hat Heinrich Hertz die Existenz der elektromagnetischen Wellen und ihre Wesensgleichheit mit den Lichtwellen experimentell nachgewiesen. Damit wurde die in den Jahren 1861 bis 1864 von James Clerk Maxwell aufgestellte elektromagnetische Theorie des Lichtes eine wesentliche Grundlage der Spektroskopie. Wie der Name sagt, bestehen die Wellen aus zwei Komponenten. Untenstehende Abbildung erläutert das am Beispiel einer linear polarisierten Welle, die sich in einem homogenen isotropen Medium in  $x$ -Richtung ausbreitet. Die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  oszilliert in der  $x$ - $y$ -Ebene, die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  senkrecht dazu in der  $x$ - $z$ -Ebene. Beide Schwingungen haben die gleiche Frequenz  $\nu$  bzw. den gleichen Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$ , der in diesem Fall nur die  $x$ -Komponente  $k_x = 2\pi/\lambda$  hat. Ebenfalls nur jeweils eine Komponente haben die Amplitudenvektoren  $\mathbf{A}^E$  und  $\mathbf{A}^H$ . Folgende Gleichungen beschreiben die Ausbreitung der linear polarisierten Welle:

$$\begin{aligned} E_y &= A_y^E \cos(k_x x - 2\pi \nu t), \\ H_z &= A_z^H \cos(k_x x - 2\pi \nu t). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ausbreitungsrichtung und Richtung der elektrischen Feldstärke bestimmen definitionsgemäß die Polarisationssebene des Lichtes, in diesem Fall ist es die  $x$ - $y$ -Ebene.



Darstellung einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet.

Die isotropen homogenen Medien werden durch die Materialgleichungen der Maxwell'schen Theorie beschrieben. Für die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  bzw. die induzierte elektrische Polarisation  $\mathbf{P}$  gilt

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}. \quad (8.18)$$

$\varepsilon_0$  bezeichnet die Dielektrizitätskonstante (*permittivity of vacuum*, Influenzkonstante),  $\varepsilon_r$  ist die relative Dielektrizitätskonstante und  $\chi_e$  die elektrische Suszeptibilität. Die zu Gleichung (8.18) analoge Materialgleichung für die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  lautet

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}. \quad (8.19)$$

$\mu_0$  bezeichnet die Permeabilitätskonstante (*permeability of vacuum*, Induktionskonstante),  $\mu_r$  ist die relative Permeabilitätskonstante. Im Unterschied zur Polarisation  $\mathbf{P}$  in G (8.18) hat die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  in G (8.19) die Dimension einer Feldstärke, die sich zur magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  addiert.

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der Welle gilt

$$c = \lambda \nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (8.20)$$

Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  als Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum, in dem  $\epsilon_r = \mu_r = 1$  ist.

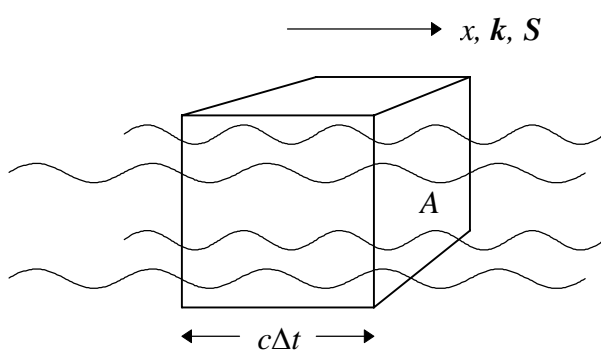
Aus den Maxwell-Gleichungen folgt weiterhin, dass die Energiedichte  $w$  (Energie pro Volumen) einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle gleichgewichtig aus einem elektrischen und einem magnetischen Anteil besteht:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H_z^2. \quad (8.21)$$

Der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$ , der die auf die Einheitsfläche bezogene Energiestromdichte bezeichnet, zeigt in  $x$ -Richtung und ergibt sich als Produkt aus Energiedichte und Lichtgeschwindigkeit:

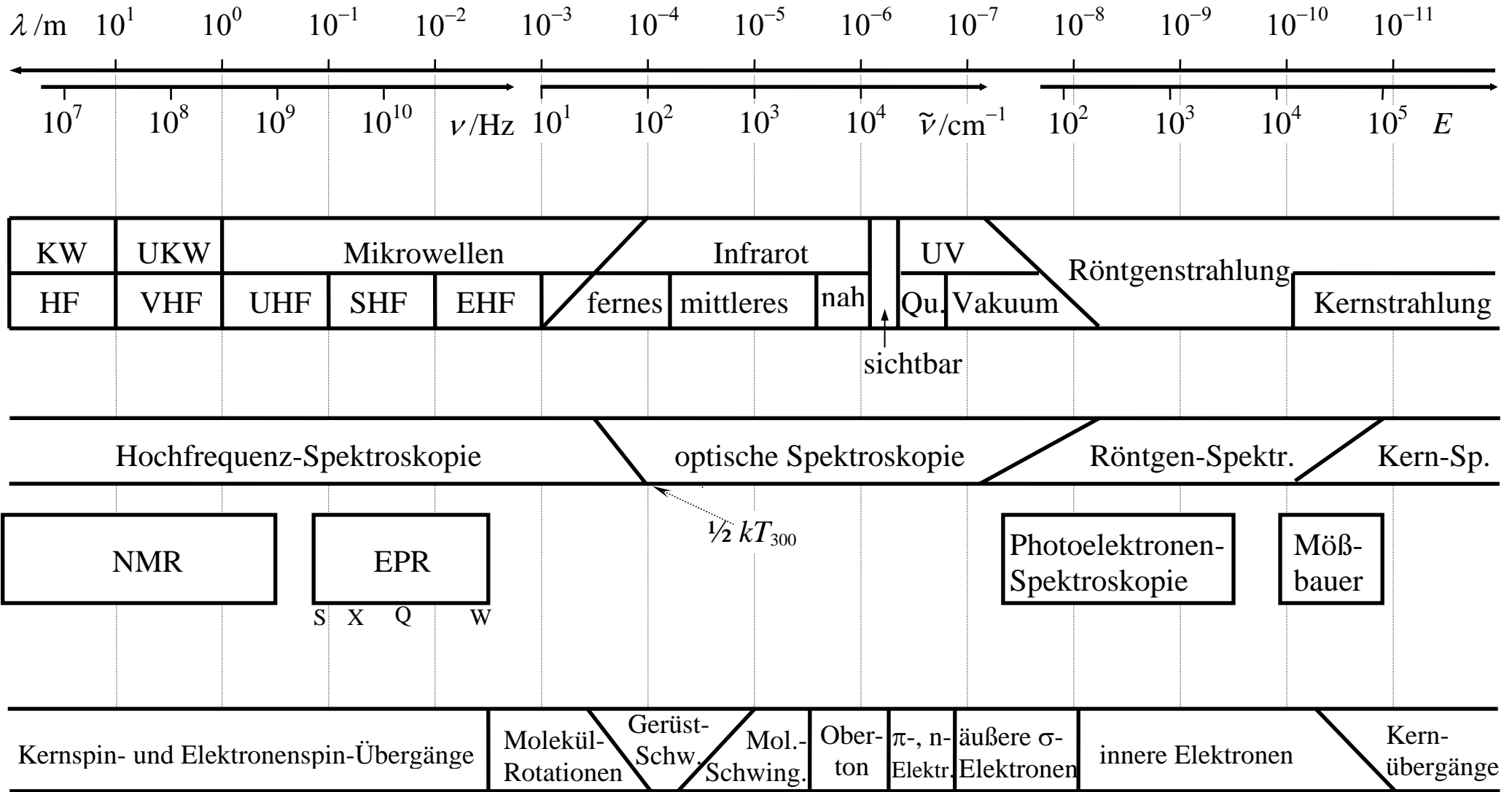
$$S_x = wc. \quad (8.22)$$

Daraus folgt die wichtige Aussage, dass der Energiefluss der Strahlung in Ausbreitungsrichtung von den Quadraten der Amplituden der Feldstärken abhängt.



Energiefluss einer elektromagnetischen Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet. Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  zeigen ebenfalls in  $x$ -Richtung. In der Zeit  $\Delta t$  fließt die im Quader eingeschlossene Energie durch die Fläche  $A$ . Wählt man für  $\Delta t$  eine Sekunde und für  $A$  die Einheitsfläche, ergibt sich aus einer Energiedichte eine Leistungsdichte gleichen Zahlenwerts.

In der Abbildung auf der nächsten Seite wird eine Darstellung der Spektroskopie über 14 Größenordnungen des elektromagnetischen Spektrums gegeben. Die in diesem Spektralbereich liegenden Hochfrequenzen HF (engl. *radio frequencies* = RF) werden als Dekameterwellen (engl. *high frequencies* = HF), Meterwellen (engl. *very high frequencies* = VHF), Dezimeterwellen (engl. *ultra high frequencies* = UHF), Zentimeterwellen (engl. *super high frequencies* = SHF) und Millimeterwellen (engl. *extremely high frequencies* = EHF) bezeichnet. Im Mikrowellenbereich ist die Verwendung von Hohlleitern üblich. Einige aneinander anschließende Mikrowellenbänder werden mit P, L, S, X, K, Q und V bezeichnet. Die Überschneidungen zwischen HF-Bereich, optischen Bereich und Röntgenbereich zeigen, dass Strahlen einer Wellenlänge elektronisch und optisch bzw. optisch und durch Röntgenröhren erzeugt werden können. Die Abbildung schließt mit der Darstellung der Übergänge ab, die die elektromagnetische Strahlung absorbieren oder emittieren.



### 8.3 Interferenzerscheinungen

Die Überlagerung von Wellen ergibt wegen der räumlichen Dimension einige Unterschiede zur Überlagerung von Schwingungen, vgl. Kapitel 7. Analog zur Überlagerung von Schwingungen ist jedoch der Sachverhalt, dass eine Überlagerung harmonischer Wellen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Phase wiederum eine harmonische Welle ergibt. Der Einfachheit halber betrachten wir zwei Wellen gleicher Amplitude:

$$y_1 = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2). \quad (8.23)$$

Zur Addition  $y_3 = y_1 + y_2$  verwenden wir das schon als G (7.35) aufgeschriebene Additionstheorem

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (8.24)$$

und erhalten

$$y_3 = 2y_0 \cos[(\varphi_2 - \varphi_1)/2] \cos[\omega t - kx + (\varphi_2 + \varphi_1)/2]. \quad (8.25)$$

Der Faktor  $\cos[(\varphi_2 - \varphi_1)/2]$  in G (8.25) kann Werte zwischen +1 (für  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \dots$ ) und -1 (für  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi, \pm 6\pi, \pm 10\pi, \dots$ ) annehmen. Die beiden Grenzwerte +1 und -1 führen zur Addition der Amplituden und werden konstruktive Interferenz genannt. Ist der Faktor null (für  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ ), spricht man von destruktiver Interferenz. Es kommt zur Auslöschung der Welle, wie man in der Mitte unten am linken Bild aus HMS sieht.

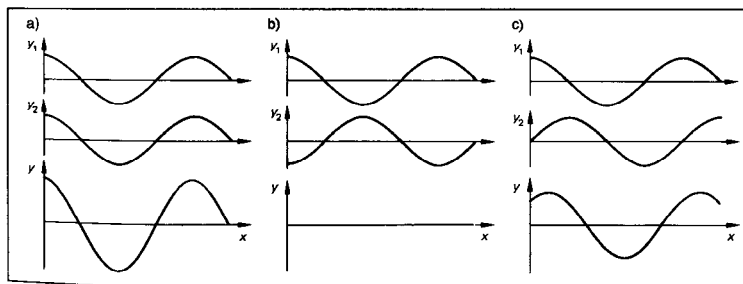
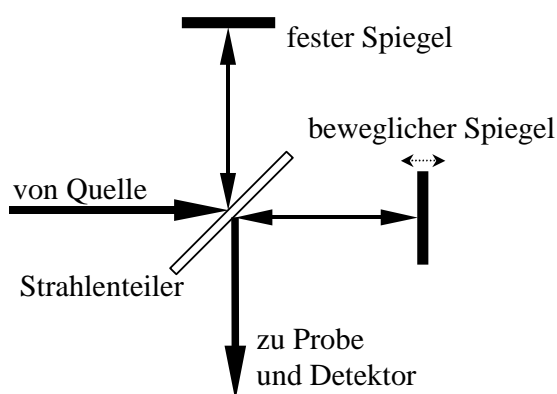


Bild 5-54. Überlagerung ebener Wellen mit Zuständen für  $t = 0$ .



Die linke Abbildung zeigt den Strahlenweg im Michelson-Interferometer. Ein halbdurchlässiger Spiegel übernimmt die Funktion eines Strahlteilers. Die halbe Intensität des von der Lichtquelle kommenden Strahls wird zum oberen festen Spiegel abgelenkt, die andere Hälfte geht zum verschiebbaren Spiegel durch. Gleiches passiert mit den an festen und beweglichen Spiegel reflektierten Strahlen. Jeweils ein Viertel der Intensität kommt am Detektor über festen

Spiegel und über beweglichen Spiegel an. Sind beide Weglängen gleich, addieren sich die Intensitäten. Ist die Weglänge um  $\lambda/2$  unterschiedlich, kommt es bei einer reinen Frequenz zur Auslöschung der Welle. Durch eine Verschiebung des beweglichen Spiegels kann man damit eine Länge als Vielfaches einer optischen Wellenlänge messen.



**Stehende Wellen** erhält man, wenn sich zwei Wellen gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Laufrichtung überlagern. Aus

$$y_1 = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = y_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_2). \quad (8.26)$$

erhalten wir nun mit G (8.24)

$$y_3 = 2y_0 \cos[\omega t + (\varphi_2 - \varphi_1)/2] \cos[kx + (\varphi_2 - \varphi_1)/2]. \quad (8.27)$$

G (8.27) enthält die Zeitabhängigkeit in der einen und die Ortsabhängigkeit in der anderen Cosinus-Funktion. Beide Abhängigkeiten sind nun voneinander getrennt.

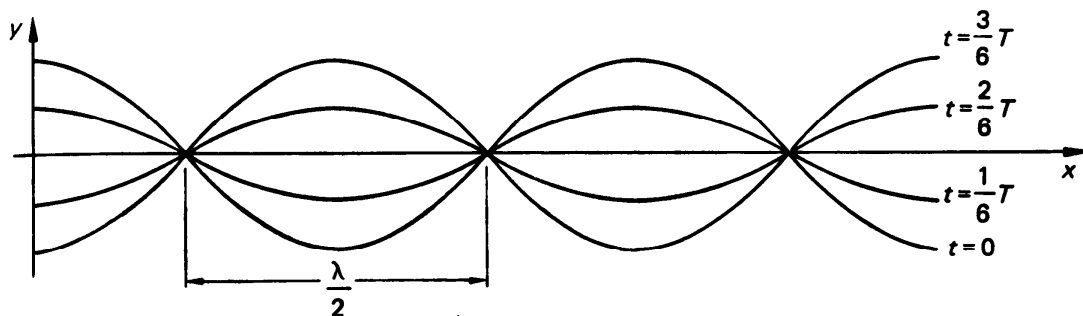


Bild 5-56. Zustände einer stehenden Welle.

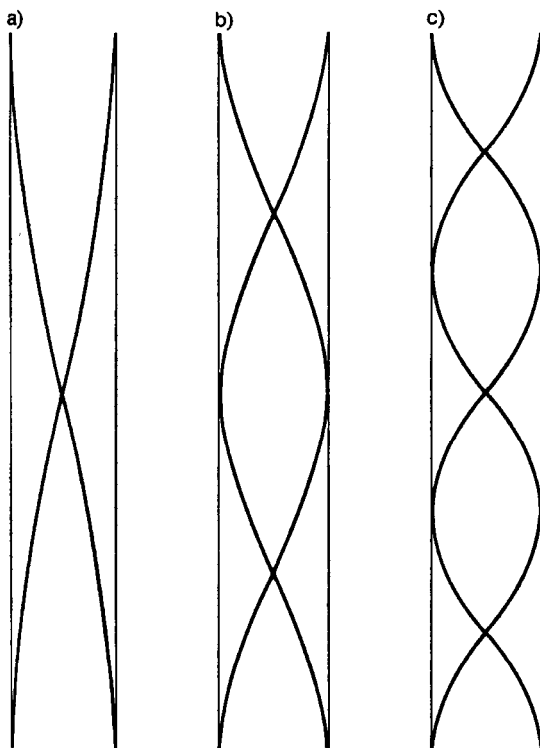


Bild 5-60. Eigenschwingungen offener Orgelpfeifen (Verlauf der Auslenkung bzw. Geschwindigkeit): a) Grundschwingung, b) erste Oberschwingung und c) zweite Oberschwingung.

Reflexionen ergeben einen Schwingungsknoten an festen Enden (und einen Schwingungsbauch an in Schwingungsrichtung frei verschiebbaren Enden). Eine an beiden Enden offene Orgelpfeife hat zwei verschiebbare Enden, während die an einem Ende geschlossene (gedackte) Pfeife nur an einem Ende eine verschiebbare Luft hat. (Abbildungen aus HMS)

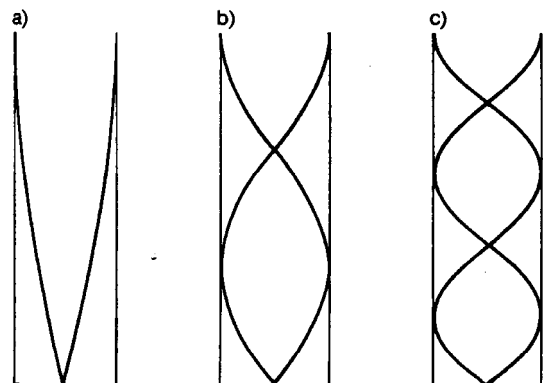


Bild 5-61. Eigenschwingungen gedackter Orgelpfeifen (Verlauf der Auslenkung bzw. Geschwindigkeit): a) Grundschwingung, b) erste Oberschwingung und c) zweite Oberschwingung.

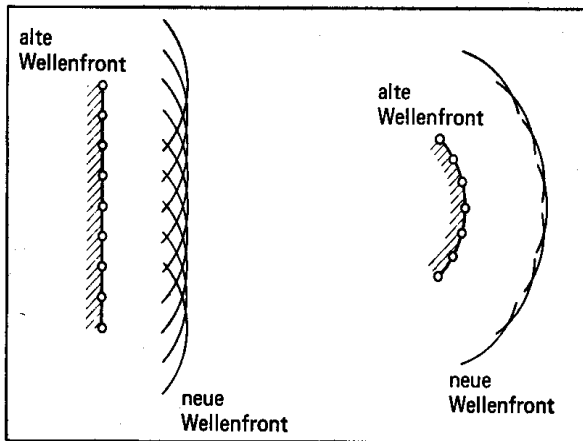


Bild 5-62. Beispiele zum Huygensschen Prinzip.

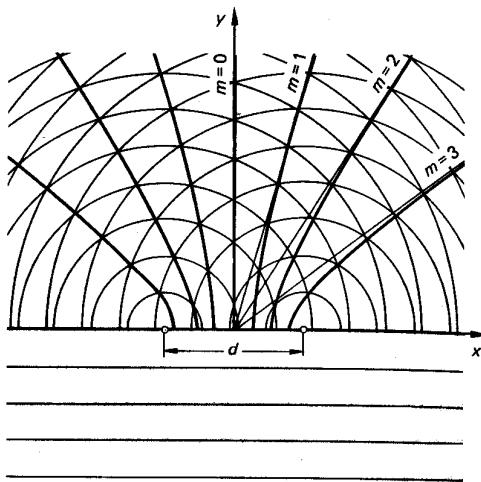


Bild 5-64. Beugung am Doppelspalt.

$$\sin \alpha_m = \frac{m\lambda}{d}.$$

(8.28)

**Beugung** ist die Richtungsänderung einer Welle an einem Hindernis. Alle Beugungserscheinungen können mit dem Huygens-Fresnelschen Prinzip erklärt werden: Zuerst definieren wir als Wellenfront (Wellenfläche) alle Orte gleicher Phase, z.B. eine Phase für die zu einem gegebenen Zeitpunkt die Momentanamplitude maximal wird. Nach Huygens (1629-1695) ist jeder Punkt Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kreiswelle bzw. Kugelwelle) und nach Fresnel (1788.1827) ist die Wellenfront bzw. Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt die Überlagerung aller Elementarwellen, die zur vorherigen Zeit ausgelöst worden sind.

Beugungsordnungen am Doppelspalt mit dem Spaltabstand  $d$  kann man sich wie folgt erklären: Eine konstruktive Interferenz ergibt sich für ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge also  $m\lambda$ . Aus geometrischen Gründen sind die Beugungsordnungen  $m$  auf  $m \leq d/\lambda$  beschränkt, was in der Optik sehr hohe Werte von  $m$  zulässt. Das linke Bild (Bild 5-64 HMS) zeigt, dass die konstruktiven Interferenzen auf Hyperbel-Ästen liegen, deren Asymptoten durch folgende Gleichung beschrieben wird:

## 8.4 Doppler-Effekt

Bewegen sich Wellenursprung und Wellenbeobachter relativ zueinander, ergibt sich dadurch eine vom Beobachter wahrgenommene Verschiebung der ausgesendeten Frequenz. Die Verschiebung ändert ihr Vorzeichen, wenn sich die Richtung der Relativbewegung umkehrt. Wird die Welle von einem Medium übertragen, ergeben sich auch unterschiedliche Erscheinungen für Bewegung der Quelle oder Bewegung des Beobachters.

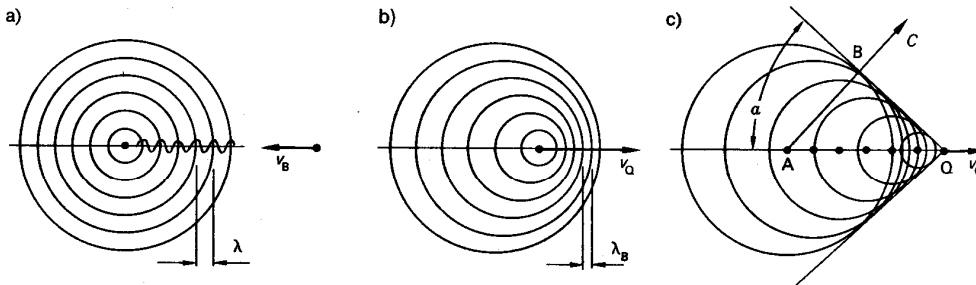


Bild 5-53. Wellenfelder zum Doppler-Effekt: a) ruhende Quelle, bewegter Beobachter, b) bewegte Quelle, ruhender Beobachter und c) Machscher Kegel beim Überschallflug.

Im mittleren Teil obiger Abbildung bewegt sich die Quelle und der Beobachter ruht. Bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu, ist die wahrgenommene Wellenlänge  $\lambda_B = \lambda - v_Q T_Q$  verkürzt, und die erhöhte wahrgenommene Frequenz ergibt sich mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  als  $v_B = c/\lambda_B$ . Wegen  $c = \lambda v_Q = \lambda/T_Q$  ist

$$v_B = v_Q \frac{c}{c - v_Q}. \quad (8.29)$$

Entfernt sich die Quelle, verlängert sich die Wellenlänge und verringert sich die Frequenz analog zu obigen Betrachtungen und wir erhalten

$$v_B = v_Q \frac{c}{c + v_Q}. \quad (8.30)$$

Bei ruhender Quelle und bewegtem Beobachter ist analog zu den Betrachtungen oberhalb G (8.30) von einer verändert wahrgenommenen Periodendauer  $T_B = \lambda/(c \pm v_B)$  auszugehen. Allgemein gilt, wenn sich die Quelle mit dem Geschwindigkeitsbetrag  $v_Q$  und der Beobachter mit dem Geschwindigkeitsbetrag  $v_B$  relativ zur ruhenden Luft bewegen

$$v_B = v_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q}, \quad (8.31)$$

wobei die oberen Vorzeichen für gegenseitige Annäherung, die unteren für voneinander entfernen gelten. Dieses von Christian Doppler 1842 ausgesprochene, einige Jahre darauf in der Akustik experimentell betätigte Prinzip hat in der Optik eine andere Form, da dort kein Bezugsmedium vorhanden ist. Vor allem ist aber die relativistische Zeitdilatation zu berücksichtigen, die bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bedeutsam wird. Es ergibt sich

$$v_B = v_Q \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}. \quad (8.32)$$

Ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit, gelten obige Betrachtungen nicht mehr. In der Akustik gibt die Einhüllende der Wellenfronten zu einer Zeit den Mach'schen Kegel (Ernst Mach 1838-1916). Diese Kopfwelle vermittelt dem ruhenden Beobachter einen explosionsartigen Knall. Für den halben Öffnungswinkel  $\alpha$  des Kegels gilt

$$\sin \alpha = \frac{c}{v_Q} = \frac{1}{\text{Ma}}. \quad (8.33)$$

G (8.33) ergibt sich daraus, dass eine zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzeugte Druckwelle zur Zeit  $t$  den Weg  $tc$  zurückgelegt hat (Gegenkathete des rechtwinkligen Dreiecks), während das Flugzeug sich in dieser Zeit um den Weg  $v_Q t$  fortbewegt hat (Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks).  $\text{Ma}$  bezeichnet die Mach'sche Zahl, also das Vielfache der Schallgeschwindigkeit, die temperaturabhängig ist. Im Temperaturbereich  $-40\text{ °C} < T < +40\text{ °C}$  gilt mit guter Näherung  $c = (351,5 + 0,6 \times T/\text{°C}) \text{ m s}^{-1}$ , wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

## 8.5 Schallwellen

Die Akustik ist die Lehre vom Schall und hat ursprünglich nur den vom menschlichen Ohr wahrnehmbaren Frequenzbereich zwischen 16 Hz und 20 kHz betrachtet. Inzwischen sind der Bereich unterhalb 16 Hz als Infraschall, der Bereich von 20 kHz bis 10 GHz als Ultraschall und als oberer Grenzbereich der Hyperschall ( $10^{10}$  -  $10^{13}$  Hz) hinzugekommen. Die Frequenz des Hyperschalls wird nach oben dadurch begrenzt, dass die Wellenlänge nicht kleiner sein kann als der doppelte Atomabstand im Festkörper des Ausbreitungsmediums. Gerade dann schwingen zwei Atome gegenphasig.

Die Schallwelle ist eine dreidimensionale Kugelwelle, wir beschränken uns hier jedoch auf eindimensionale Betrachtungen. Wir beginnen mit der als G (8.08) abgeleiteten Gleichung:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (8.34)$$

Für die Schallausbreitung sollen die Schwingungen so schnell erfolgen, dass ein Wärmeübergang mit der Umgebung nicht stattfinden kann. Wir haben es also mit einem adiabatem System zu tun, in dem isentropische Zustandsänderungen erfolgen, für die sich die Entropie des Systems nicht ändert. In diesem Fall gilt die Adiabatangleichung bzw. Isentropengleichung der Thermodynamik  $pV^\kappa = \text{konstant}$ . Für den Isentropenexponenten gilt  $\kappa = c_p/c_v$ , wobei rechts der Quotient der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen steht. Für trockene Luft ist  $c_p = 1,005 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  und  $c_v = 0,717 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , also  $\kappa = 1,40$ .

Nun verwenden wir die Definition des Kompressionsmoduls für fluide Substanzen, die bereits in G (6.12) eingeführt wurde,

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}, \quad (8.35)$$

sowie die durch Differentiation der Adiabatangleichung  $pV^\kappa = \text{konstant}$  erhaltene Gleichung

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{V}{\kappa p}. \quad (8.36)$$

G (8.36) in G (8.35) eingesetzt ergibt

$$K = \kappa p. \quad (8.37)$$

Die Zustandsgleichung idealer Gase ist

$$p = \rho R_M T, \quad (8.38)$$

wobei  $R_M$  die auf die Masse bezogene ideale Gaskonstante darstellt. Für trockene Luft ist  $R_M = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Die Kombination von G (8.34), (8.37) und (8.38) ergibt

$$c_{\text{Gas}} = \sqrt{\kappa R_M T}. \quad (8.39)$$

Setzen wir in G (8.39) die Werte für trockene Luft ein und nähern die Wurzel durch eine Reihenentwicklung an, erhalten wir die schon am Ende des vorhergehenden Kapitels 8.4 genannte im Temperaturbereich von  $-40 \text{ °C} < T < +40 \text{ °C}$  mit einer Abweichung von weniger als 1 % gültige Gleichung

$$c = (351,5 + 0,6 \times T / \text{°C}) \text{ m s}^{-1}. \quad (8.40)$$

Die Schallgeschwindigkeiten  $c/\text{m s}^{-1}$  in Flüssigkeiten und festen Körpern sind wesentlich höher: Wasser 1480, Glyzerin 1950, Eis 3200, Beton 4000, Holz 4500, Stahl 5050, Glas 5300.

Für den **Schallwechseldruck**  $p(t, x)$ , der sich in Gasen dem statischen Druck überlagert, betrachten wir die Kombination der Gleichungen (8.07) und (8.08):

$$p(t, x) = p_0 \cos[\omega(t - x/c)]. \quad (8.41)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Koordinate der Auslenkung ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - x/c)]. \quad (8.42)$$

G (8.42) kombinieren wir mit G (8.04)  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  und erhalten

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{p_0 \omega}{\rho c} \sin[\omega(t - x/c)]. \quad (8.43)$$

Daraus folgt durch Integration über die Zeit

$$v_x = -\frac{p_0}{\rho c} \cos[\omega(t - x/c)], \quad (8.44)$$

wobei die übliche Integrationskonstante wegen der Nebenbedingung  $v_x = 0$  für  $p_0 = 0$  verschwindet.

$v_x$  ist die **Verschiebungsgeschwindigkeit** oder **Schallschnelle** mit der sich ein schwingendes Teilchen während der Schallausbreitung bewegt. Sie besitzt die gleiche Phase wie der Schallwechseldruck, vgl. G (8.42) und kann als  $v_x = d\xi/dt$  geschrieben werden, wobei  $\xi$  die Verschiebungsordinate parallel zur  $x$ -Richtung darstellt. Die Verschiebung  $\xi$  erhält man durch Integration von G (8.44) nach der Zeit:

$$\xi = -\frac{p_0}{\rho\omega c} \sin[\omega(t - x/c)] = -x_0 \sin[\omega(t - x/c)]. \quad (8.45)$$

Als **Schallwellenwiderstand** oder **Schallkennimpedanz**  $Z$  bezeichnet man das Verhältnis aus der Amplitude des Schallwechseldrucks  $p_0$  und der Amplitude der Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_{x0} = p_0/(\rho c)$

$$Z = \rho c. \quad (8.46)$$

Die Dimension von  $Z_0$  ist  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  und zugehörige Zahlenwerte sind für Luft (0 °C)  $427$ , Wasser  $1,4 \times 10^6$ , Glycerin  $2,5 \times 10^6$ , Eis  $2,9 \times 10^6$ , Beton  $8,4 \times 10^6$ , Holz  $2,7 \times 10^6$ , Stahl  $39 \times 10^6$ , Glas  $13 \times 10^6$ .

Verschiebung  $\xi$ , vgl. G. (8.45) und Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_x$ , vgl. G. (8.44) verhalten sich wie Auslenkung und Geschwindigkeit bei der schwingenden Feder, vgl. G (7.05). Sie sind um  $90^\circ$  in der Phase verschoben und eine Komponente hat den Wert null, wenn der Betrag der anderen Komponente einen Maximalwert annimmt. Da die mechanische Gesamtenergie konstant sein muss, kann sie aus dem Maximum der kinetischen Energie berechnet werden. Ist die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = mv_x^2/2$ , ergibt sich die entsprechende Energiedichte (Energie pro Volumen)  $w_{\text{kin}} = \rho v_x^2/2$ . Für die Energiestromdichte erhalten wir wie in G (8.12)

$$S = wc = \frac{p_0^2}{2c\rho} = \frac{1}{2} c\rho \omega^2 x_0^2 = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z} \quad (8.47)$$

Das letzte Gleichheitszeichen in G (8.47) ergibt sich aus dem Sachverhalt, dass für eine einzelne Frequenz (Sinus- bzw. Cosinus-Funktion) für das im zeitlichen Mittelwert effektiv wirkende Druckquadrat gilt:  $p_{\text{eff}}^2 = p_0^2/2$ . (Der zeitliche Mittelwert über  $\sin^2 \omega t$  oder  $\cos^2 \omega t$  ist gleich  $1/2$ .) Für mehrere Frequenzen addieren sich die jeweiligen Werte von  $p_{\text{eff}}^2$ .

Die Energiestromdichte  $S$  (Energieflussdichte  $j$ , Schallstärke, Schallintensität  $I$ ) stellt die Energie dar, die in 1 s durch eine Fläche von  $1 \text{ m}^2$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle transportiert wird. In der Akustik wird die Intensität des Schalls durch den Schallintensitätspegel beschrieben, der ein logarithmisches Maß mit der Einheit Dezibel (dB) darstellt:

$$L/\text{dB} = 10 \lg \frac{S}{S_0} = 10 \log_{10} \frac{S}{S_0}. \quad (8.48)$$

$\lg$  oder  $\log_{10}$  bezeichnen den auf die Basis 10 bezogenen Logarithmus. Die Bezugsgröße  $S_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$  ist die durch Konvention festgelegte Hörschwelle bei der Frequenz von 1 kHz. Eine ähnliche Definition gilt für den Schallleistungspegel, bei dem  $S/S_0$  in G (8.48)

durch den Quotient der Leistungen  $P/P_0$  mit der Bezugsleistung  $P_0 = 10^{-12}$  W zu ersetzen ist. Bei Verwendung von  $p_{\text{eff}}/p_{0 \text{ eff}}$  (oder  $v_{\text{eff}}/v_{0 \text{ eff}}$ ) im Quotienten ändert sich der Faktor.

$$L/\text{dB} = 20 \lg \frac{P_{\text{eff}}}{P_{0 \text{ eff}}} \quad (8.49)$$

ist der Schalldruckpegel, wobei als Referenzwert international  $p_{0 \text{ eff}} = 2 \times 10^{-5}$  Pa vereinbart wurde.

Die Lautstärke ist eine menschliche Empfindung, die für eine gegebene Schallintensität oder einen gegebenen Schalldruckpegel noch von der Frequenz abhängt. Diese Frequenzabhängigkeit wird durch einen Faktor  $K(\nu)$  in folgender Gleichung für die Lautstärke  $A$  berücksichtigt:

$$A/\text{Phon} = 20 K(\nu) \lg \frac{P_{\text{eff}}}{P_{0 \text{ eff}}} . \quad (8.50)$$

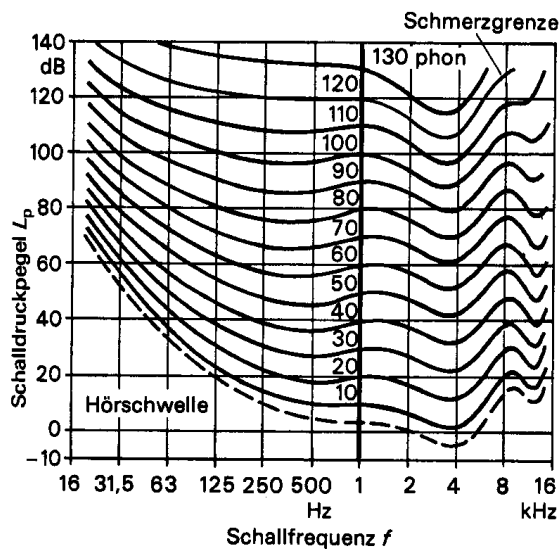


Bild 7-12. Kurven gleicher Lautstärke  $L_S$ .

Die logarithmische Phon-Skala ist so definiert, dass  $K(1 \text{ kHz}) = 1$  gilt. In einigen physikalischen Lehrbüchern findet man anstelle von  $G$  (8.50)  $A/\text{Phon} = 10 K(\nu) \lg (S/S_0)$ . Dann ist 0 Phon die Hörschwelle bei 1 kHz, während wegen des Referenzdrucks in  $G$  (8.49) die Hörschwelle bei ca. 4 Phon ist. Generell gilt, dass eine Verdopplung der Lautempfindung bei einer Erhöhung der Lautstärke von 10 Phon auftritt. Für Frequenzgemische sind die Lautstärken zu addieren. 120 Phon sind die Schmerzgrenze, 85 Phon im Mittel der Arbeitszeit führen nach 10 Jahren bei 5% der Betroffenen zur Schwerhörigkeit.  $G$  (8.50) gibt nur physikalischen Sachverhalt wieder, technische Messvorschriften sind komplizierter.